Jörg MEYER, Hameln

Von der einfachsten Hyperbel zu den hyperbolischen Funktionen

Für $\boxed{y=\frac{1}{x}}$ und $t>1$ hat man $A+C=\frac{1}{2}$,

$B+D=\ln t$, $C+D=\frac{1}{2}$ und deshalb

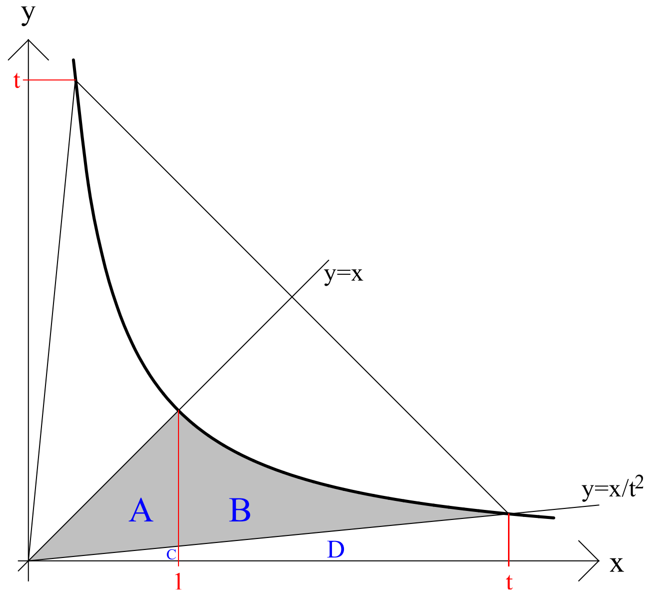
$\boxed{A+B=\ln t}$.

Daher ist $\boxed{A=D}$, was sich auch direkt einsehen lässt:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\cdot 1=\frac{t^2-1}{2\cdot t^2},$$

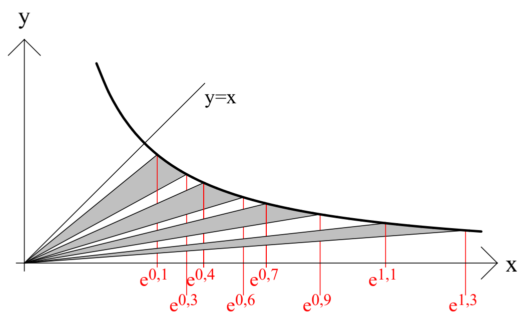
$$D=\frac{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}}{2}\cdot(t-1)=\frac{(1+t)}{2\cdot t^2}\cdot(t-1).$$

Schreibt man $\boxed{t=e^u}$, so ist $\boxed{A+B=u}$.



Für $t=1=e^0$ ist $A=B=0=A+B$. Aus Symmetriegründen tritt die Fläche mit dem Inhalt $A+B$ auch links von der Winkelhalbierenden des I. Quadranten auf.
Formal gehört zur Fläche oberhalb der Winkelhalbierenden der Kurvenpunkt mit dem x-Wert e^{-u}, da man jedoch von $1=e^0$ bis zu e^{-u} „rückwärts geht", heben sich die Minuszeichen auf, sodass der Flächeninhalt wieder so groß ist wie u.

Anders als beim Kreis hat man bei der Hyperbel keine Rotationssymmetrie. Die nebenstehenden grauen Flächen haben alle den gleichen Inhalt 0,2.

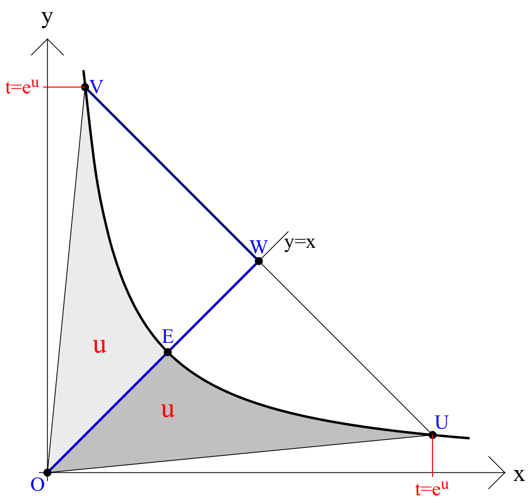


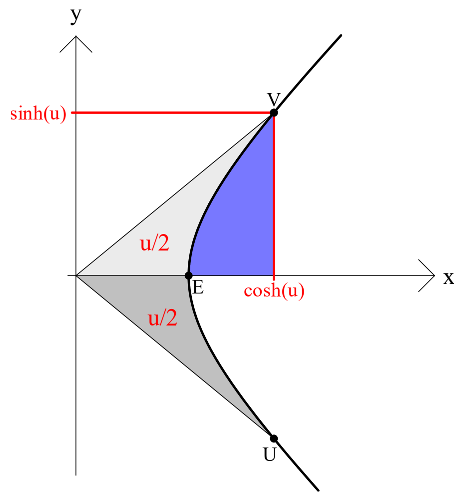
Wegen $U=\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1/t\\t\end{pmatrix}$ und

$W=\frac{t+\frac{1}{t}}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\cosh u\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ist $\boxed{|OW|=\cosh u\cdot\sqrt{2}}$.

Wegen $W-V=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\sinh u\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ist

$\boxed{|WV|=\sinh u\cdot\sqrt{2}}$.





Dreht man die Hyperbel um -45° um den Ursprung mit der Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix}$ und staucht anschließend mit dem Stauchfaktor $\sqrt{2}$ (um ein schöneres Endergebnis zu erhalten), so wird aus dem Punkt

$U = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ der Punkt

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} t+1/t \\ -t+1/t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot\cosh u \\ -2\cdot\sinh u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(-u) \\ \sinh(-u) \end{pmatrix}$$

Weiterhin wird $V = \begin{pmatrix} 1/t \\ t \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \cosh u \\ \sinh u \end{pmatrix}$ abgebildet und $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Bildpunkte erfüllen die Gleichung $\boxed{x^2 - y^2 = 1}$.

Den Inhalt F der halben grauen Fläche bekommt man etwa wie folgt:

$$F = \frac{1}{2}\cdot\cosh u\cdot\sinh u - \underbrace{\int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2-1}\cdot dx}_{=:J}$$

mit

$$J = \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2-1}\cdot dx \overset{x=\cosh t}{=} \int_0^u \underset{u}{\sinh t}\cdot\underset{v'}{\sinh t}\cdot dt = \sinh t\cdot\cosh t\Big|_0^u - \int_0^u \cosh t\cdot\cosh t\cdot dt$$

$$= \sinh u\cdot\cosh u - \int_0^u \left(1+\sinh^2 t\right)\cdot dt = \sinh u\cdot\cosh u - u - J$$

und deshalb $J = \dfrac{\sinh u\cdot\cosh u - u}{2}$ und (erwartungsgemäß)

$$F = \frac{1}{2}\cdot\cosh u\cdot\sinh u - \frac{\sinh u\cdot\cosh u - u}{2} = \frac{u}{2}.$$