Jörg MEYER, Hameln 18. 4. 2025

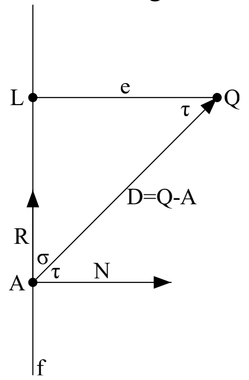
Einige Eigenschaften der rechtwinkligen Hyperbel zu y=1/x

Der Graph zu $y=\frac{1}{x}$ ist von antiproportionalen Zuordnungen bekannt. Da diese Kurve die erste (und mitunter auch die einzige) Bekanntschaft mit einer Hyperbel ist, liegt es nahe, die wesentlichen Eigenschaften anhand dieser Kurve auf elementare Weise zu gewinnen und sie nicht als Spezialfall allgemeiner (ohnehin nicht mehr bekannter) Kegelschnitt-Eigenschaften aufzufassen.
Die dargestellten Sachverhalte eignen sich auch als Aufgaben für den Schulunterricht, ohne dass man das Thema in der hier dargestellten Reihenfolge unterrichten müsste.
Die Vorgehensweise ist i.w. analytisch, um die vorgegebene Koordinatisierung auszunützen.

Inhalt

Zwei Resultate der Vektor-Geometrie vorab

Auch wenn das untersuchte Objekt (die Hyperbel mit der Gleichung $y=\frac{1}{x}$) nur ein Spezialfall eines allgemeinen Kegelschnitts ist, ist es dennoch in manchen Fällen einfacher, die Untersuchungsmethode mitunter allgemeiner zu halten.



Der **Abstand** eines Punktes Q zu einer Geraden $f:\ X(t)=A+t\cdot R$ in Parameterform bzw. $X\cdot N=A\cdot N$ in Normalenform ergibt sich wie folgt:

Mit $\boxed{D:=Q-A}$ ist $d(Q,f)=d(Q,L)=|D|\cdot|\cos(D,N)|$, also $\boxed{d(Q,f)=\frac{|D\cdot N|}{|N|}}$.

Für den **Lotfußpunkt** $L=A+\lambda\cdot R$ gilt

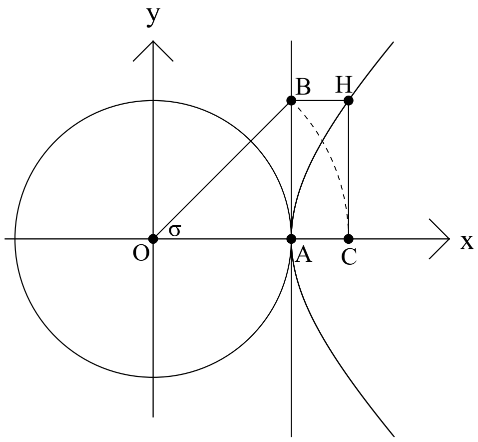
$|AL|=|L-A|=\lambda\cdot|R|=|D|\cdot\cos(R,D)=\frac{R\cdot D}{|R|}$, also $\boxed{L=A+\frac{R\cdot D}{R^2}\cdot R}$.

Ähnlichkeit

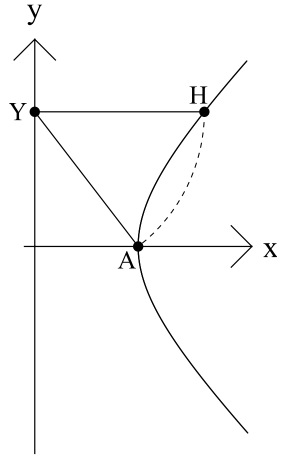
Für $k>0$ geht der Graph zu $y=\frac{k}{x}$ aus dem Graphen zu $y=\frac{1}{x}$ durch Streckung in y-Richtung oder durch zentrische Streckung vom Ursprung aus mit dem Streckfaktor $\sqrt{k}$ hervor. Beide Kurven sind daher ähnlich zueinander. Hier wird nur der Fall $k=1$ betrachtet.

Eine andere Standardform und mehrere Konstruktionen

Ersetzt man in $x\cdot y=1$ die Variable x durch $u+v$ und die Variable y durch $u-v$, bekommt man $u^2-v^2=1$ mit dem allgemeinen Punkt $H(\sigma)=\begin{pmatrix}1/\cos\sigma\\ \tan\sigma\end{pmatrix}$, der zu einer einfachen Konstruktion führt:



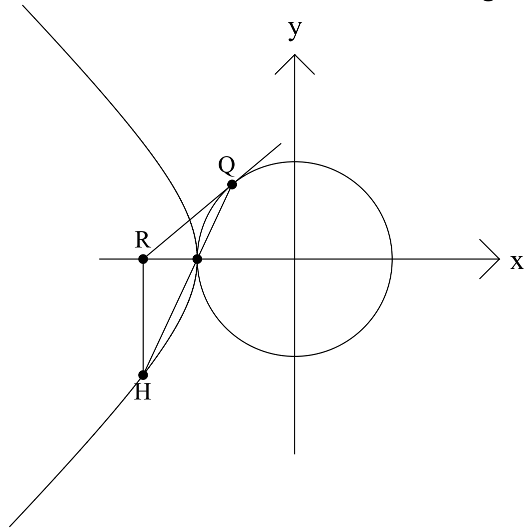
Um den Ursprung O wird mit dem Radius 1 ein Kreis geschlagen; dann ist $A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Es sei $B=\begin{pmatrix}1\\ \tan\sigma\end{pmatrix}$ ein beliebiger Punkt auf der Tangente zu A. Der Kreis um O mit dem Radius $OB=\frac{1}{\cos\sigma}$ schneidet die x-Achse in $C=\begin{pmatrix}1/\cos\sigma\\0\end{pmatrix}$. Dann ist $H=\begin{pmatrix}1/\cos\sigma\\ \tan\sigma\end{pmatrix}$.



Auf eine ähnliche Konstruktion kommt man, wenn man $x^2-y^2=a^2$ umformt zu $a^2+y^2=x^2$.

Der Punkt $A=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ sei fest und $Y=\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ variabel sowie x der Abstand zwischen A und Y.

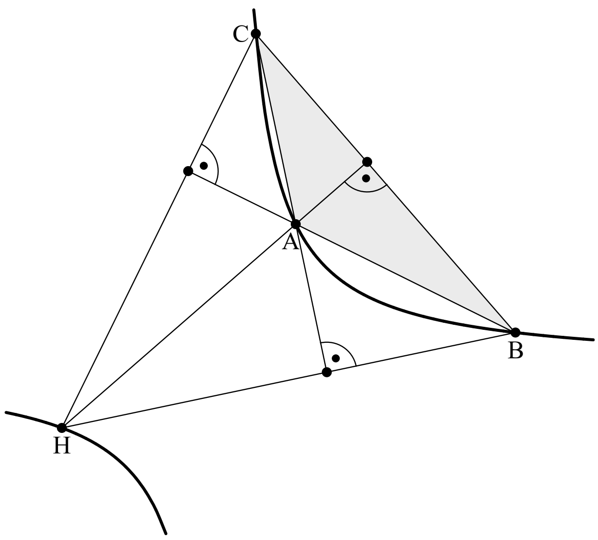
Eine Konstruktion mit Hilfe eines Kreises geht so:



$Q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ bewege sich auf dem Kreis um den Ursprung mit dem Radius r.
Die Tangente in Q schneidet die x-Achse in $R = \begin{pmatrix} r^2/u \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt der Senkrechten in R zur x-Achse mit der Verbindungsgeraden von Q und Westpol des Kreises ist $H = \frac{r}{u} \cdot \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann ist $u = \frac{r^2}{x}$ und $v = \frac{r \cdot y}{x}$.
Aus $u^2 + v^2 = r^2$ folgt somit
$r^2 + y^2 = x^2$.

Beide Formen ($x \cdot y = 1$ und $x^2 - y^2 = 1$) gehen durch eine Drehstreckung auseinander hervor. Im Folgenden wird die Hyperbel meistens durch $x \cdot y = 1$ beschrieben; in einigen wenigen Fällen durch $x^2 - y^2 = 1$.

Höhen



Ist ABC ein der Hyperbel einbeschriebenes Dreieck mit $A = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ 1/b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c \\ 1/c \end{pmatrix}$, so ist $H = \begin{pmatrix} -1/(a \cdot b \cdot c) \\ -a \cdot b \cdot c \end{pmatrix}$ der Höhenschnittpunkt von ABC, denn BC hat die Steigung $\frac{-1}{b \cdot c}$ und HA die Steigung $b \cdot c$. HA ist also Höhe.
Insbesondere liegt auch H auf der Hyperbel.

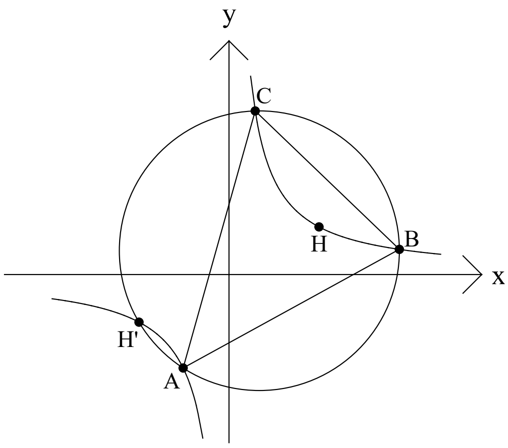
Der Umkreis von $A = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ 1/b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c \\ 1/c \end{pmatrix}$ hat (mit CAS-Hilfe) die Gleichung

$$\left(x - \frac{a+b+c+\frac{1}{a \cdot b \cdot c}}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+a \cdot b \cdot c}{2} \right)^2 = \frac{\left(a^2 \cdot b^2 + 1\right) \cdot \left(b^2 \cdot c^2 + 1\right) \cdot \left(c^2 \cdot a^2 + 1\right)}{4 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2},$$

schneidet man ihn mit der Hyperbel zu $y = \frac{1}{x}$,
bekommt man die Schnittgleichung

$$(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdot(a\cdot b\cdot c\cdot x-1)=0.$$

Da $H = \begin{pmatrix} -1/(a\cdot b\cdot c) \\ -a\cdot b\cdot c \end{pmatrix}$ der Höhenschnittpunkt von ABC ist, liegt nicht H auf dem Umkreis, sondern sein Bild bei Spiegelung am Ursprung.



Brennpunkte

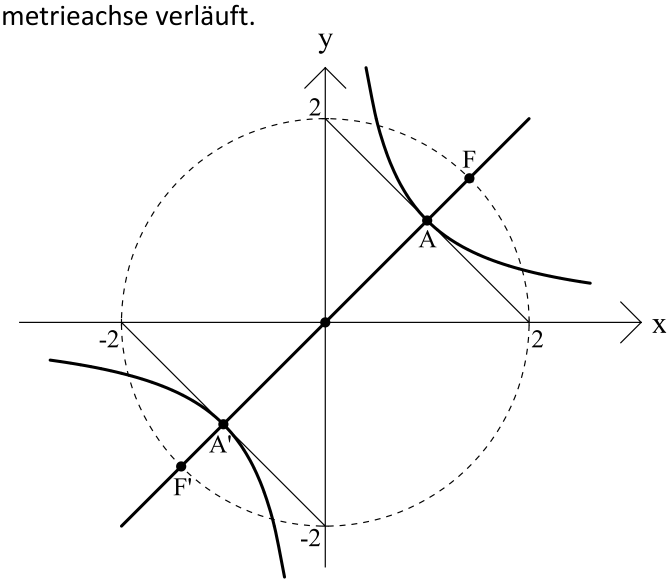
Die Koordinatenachsen sind **Asymptoten**, und $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind zwei Kurvenpunkte, durch die die (in der folgenden Graphik fette) Symmetrieachse verläuft.

Die Tangente in A schneidet die Koordinatenachsen in $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

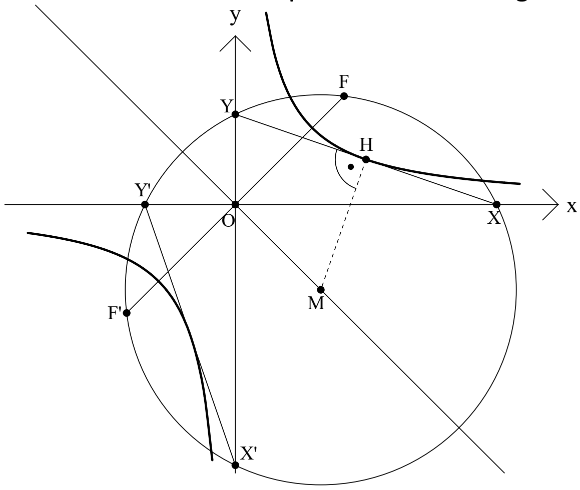
Der Kreis um den Ursprung durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet die Achse im

Brennpunkt $\boxed{F = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}}$. Analog

konstruiert man den zweiten **Brennpunkt** $\boxed{F' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}}$.



Die Bedeutung der Brennpunkte wird im folgenden Abschnitt erläutert.
Man bekommt die Brennpunkte auch auf allgemeinere Art:



Die Tangente in $H = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ schneidet die x-Achse in $X = \begin{pmatrix} 2\cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$ und die y-Achse in $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/t \end{pmatrix}$. Spiegelt man X und Y an der 2. Winkelhalbierenden, bekommt man X‘ und Y‘. Wegen $|OX|\cdot|OY'| = |OX|\cdot|OY| = |OX'|\cdot|OY|$ liegen (nach der Umkehrung des Sehnensatzes) X, Y, X‘, Y‘ auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M aus Symmetriegründen auf der 2. Winkelhalbierenden liegt.

Dieser Kreis schneidet die 1. Winkelhalbierende in F und F‘, und nach dem Sehnensatz ist $|OF|\cdot|OF'| = |OX'|\cdot|OY| = |OX|\cdot|OY| = 4$, also handelt es sich um die beiden Brennpunkte.

Punktabstände

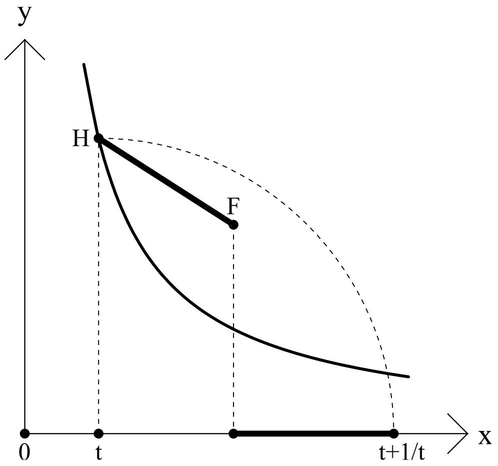
Es ist $\left|AF'\right|-\left|AF\right|=\left(2+\sqrt{2}\right)-\left(2-\sqrt{2}\right)=2\cdot\sqrt{2}$. Gilt das auch für andere Kurvenpunkte $H=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ im I. Quadranten? Es ist

$$\left|HF\right|^2=\begin{pmatrix} t-\sqrt{2} \\ 1/t-\sqrt{2} \end{pmatrix}^2=t^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot t+2+\frac{1}{t^2}-\frac{2\cdot\sqrt{2}}{t}+2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)+2=\left(\left(t+\frac{1}{t}\right)-\sqrt{2}\right)^2$$

$$\left|HF'\right|^2=\begin{pmatrix} t+\sqrt{2} \\ 1/t+\sqrt{2} \end{pmatrix}^2=t^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot t+2+\frac{1}{t^2}+\frac{2\cdot\sqrt{2}}{t}+2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(t+\frac{1}{t}\right)+2=\left(\left(t+\frac{1}{t}\right)+\sqrt{2}\right)^2$$

Im I. Quadranten ist $\left(t+\frac{1}{t}\right)-\sqrt{2}>0$.

In der Graphik haben demnach die fetten Strecken gleiche Länge.



Somit ist dort

$$\left|HF'\right|-\left|HF\right|=\left(\left(t+\frac{1}{t}\right)+\sqrt{2}\right)-\left(\left(t+\frac{1}{t}\right)-\sqrt{2}\right)=2\cdot\sqrt{2}$$

.

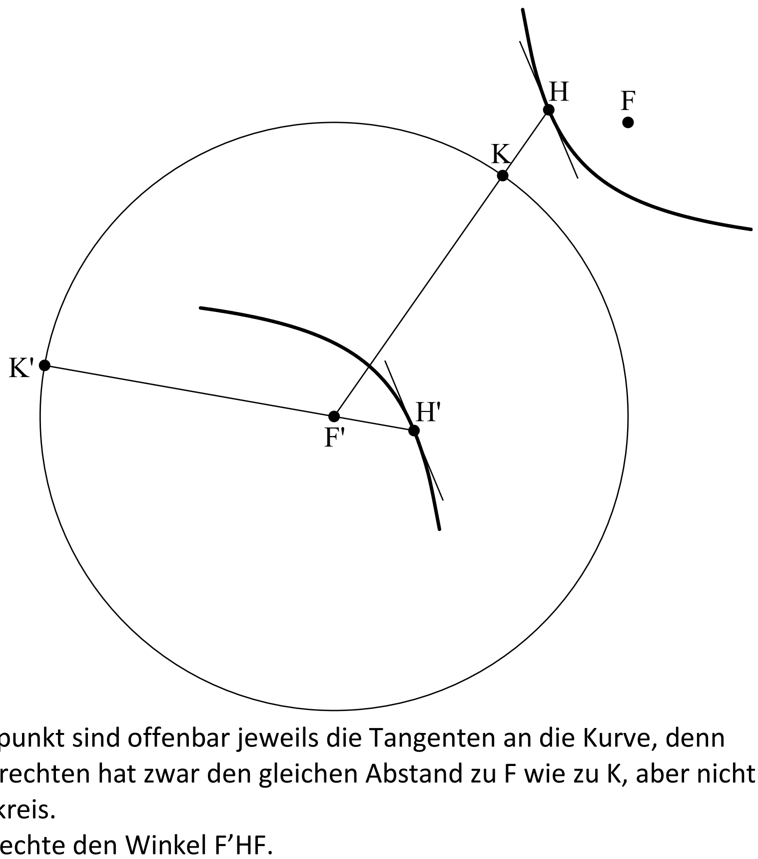
Analog ist im III. Quadranten $\left|HF\right|-\left|HF'\right|=2\cdot\sqrt{2}$,

zusammen also $\boxed{\left|\left|HF\right|-\left|HF'\right|\right|=\pm 2\cdot\sqrt{2}}$.

Für das Produkt gilt $\boxed{\left|HF\right|\cdot\left|HF'\right|=\left|OH\right|^2}$ mit O als Ursprung.

Leitkreise

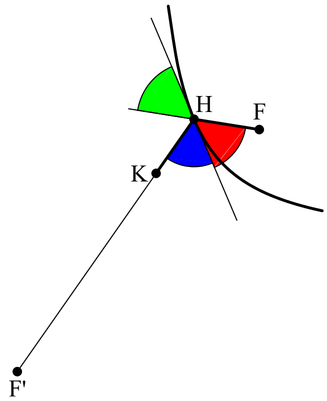
Man kann die Eigenschaft $\left|HF'\right|-\left|HF\right|=2\cdot\sqrt{2}$ für H im I. Quadranten auch schreiben als $\left|HF\right|=\left|HF'\right|-2\cdot\sqrt{2}$, d.h. der Abstand von H zu F ist so groß wie der Abstand von H zum **Leitkreis** um F' mit dem Radius $2\cdot\sqrt{2}$.
Dies liefert eine einfache Konstruktion der Kurve: K wandere auf dem Leitkreis. Dann ist H der Schnittpunkt von GK mit der Mittelsenkrechten zu K und F.
Man bekommt so auch den anderen Hyperbelast, bei dem ein Punkt H' den gleichen Abstand zu F wie zum Kreis hat, wenn man unter „Abstand zum Kreis" nicht den minimalen, sondern den maximalen Abstand versteht.



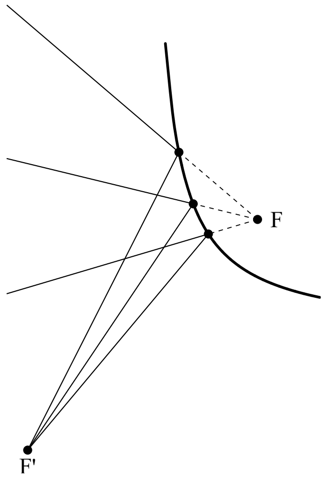
Die Mittelsenkrechten zu F und Kreispunkt sind offenbar jeweils die Tangenten an die Kurve, denn ein anderer Punkt auf der Mittelsenkrechten hat zwar den gleichen Abstand zu F wie zu K, aber nicht mehr den gleichen Abstand zum Leitkreis.
Die Tangente halbiert als Mittelsenkrechte den Winkel F'HF.

Spiegelung

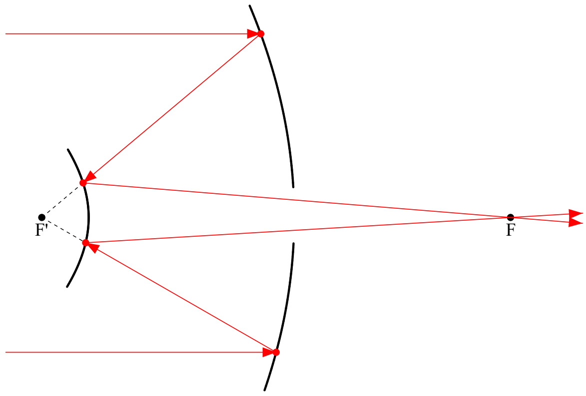
Ein von F‘ kommender Lichtstrahl treffe von links auf die Kurve, und zwar im Punkt H im I. Quadranten. Er wird an der Tangente zu H reflektiert. In der Graphik wurde wegen der Übersichtlichkeit der Leitkreis weggelassen. Da das Dreieck KFH gleichschenklig ist, haben der blaue und der rote Winkel gleiche Größe. Der grüne Winkel ist Scheitelwinkel zum roten. Daher wird der von G kommende Lichtstrahl so reflektiert, als käme er nach der Reflexion von F.



Damit wirkt die Reflexion an der Kurve so, dass die von F‘ ausgehenden Lichtstrahlen nach der Reflexion alle von F zu kommen scheinen.

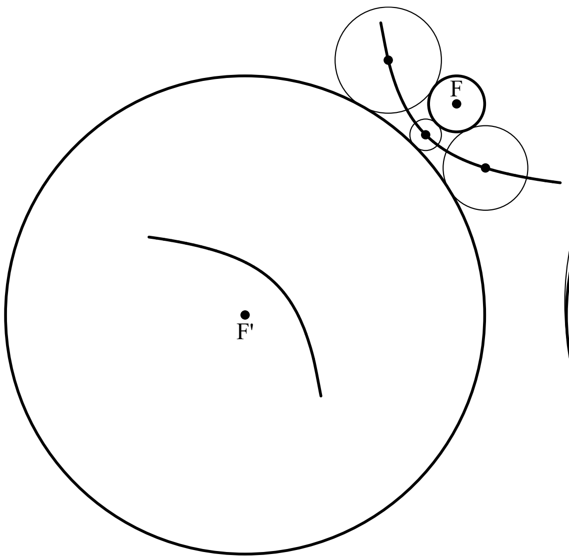


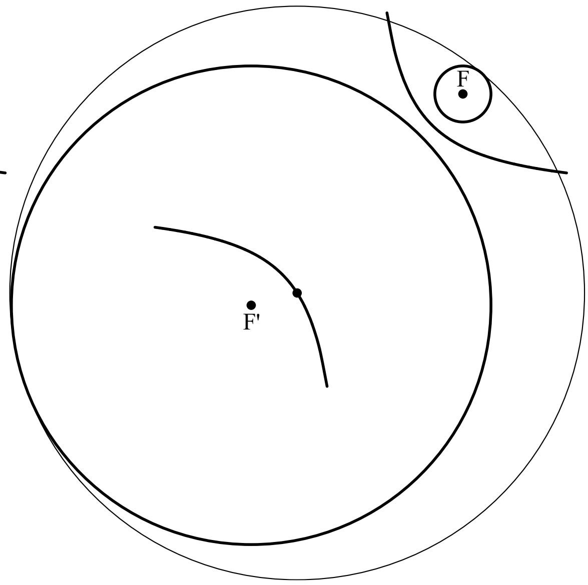
Eine Anwendung ist das CASSEGRAIN-Teleskop, bei dem die Hyperbel gar nicht rechtwinklig zu sein braucht:
Von links kommende achsenparallele Strahlen treffen auf die Parabel (mit Brennpunkt F‘). Nach der Reflexion an der Parabel treffen sie auf die Hyperbel (mit den Brennpunkten F‘ und F). Sie werden dort so reflektiert, dass sie anschließend durch F gehen. Das Bild in F kann mit einer Lupe besichtigt werden.



Zweikreis-Berührung

Man kann die Eigenschaft $|HF'|-|HF|=2\cdot\sqrt{2}$ für H im I. Quadranten auch schreiben als $|HF'|-\left(r+2\cdot\sqrt{2}\right)=|HF|-r$, d.h. der Kreis um H mit dem Radius $|HF|-r$ berührt den Kreis um F mit Radius r und den Kreis um F‘ mit Radius $r+2\cdot\sqrt{2}$; dabei ist r beliebig:





Der rechte Hyperbel-Ast besteht aus allen Mittelpunkten von Kreisen, die den Kreis um F und den Kreis um F‘ von außen berühren.

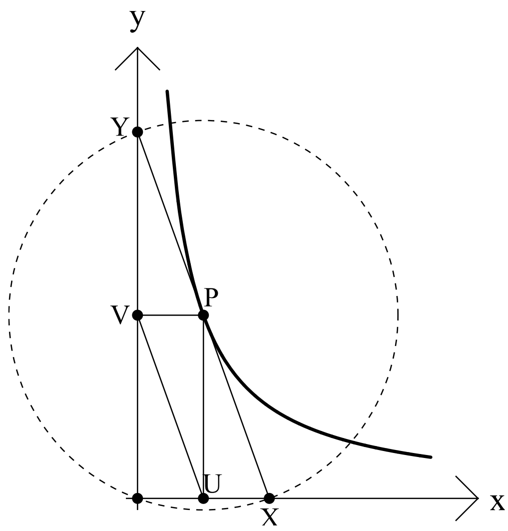
Für Punkte H auf dem linken Hyperbel-Ast ist $|HF'|+r+2\cdot\sqrt{2}=|HF|+r$, der Kreis um H mit Radius $|HF|+r$ berührt ebenfalls die Kreise um F‘ und F.

Tangenten und Sehnen

Die **Tangente** im Punkt $P=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ mit der Gleichung $y=\frac{-1}{t^2}\cdot x+\frac{2}{t}$ schneidet die x-Achse in $X=\begin{pmatrix} 2\cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$ und die y-Achse in $Y=\begin{pmatrix} 0 \\ 2/t \end{pmatrix}$.

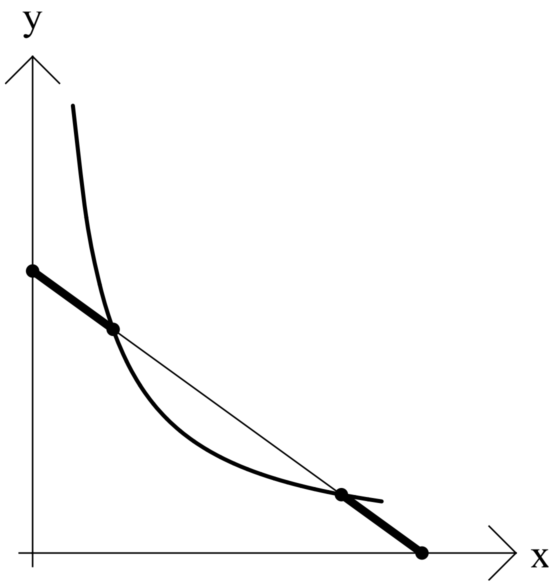
Dann ist $PX=PY=PO=\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}$ mit O als Ursprung.

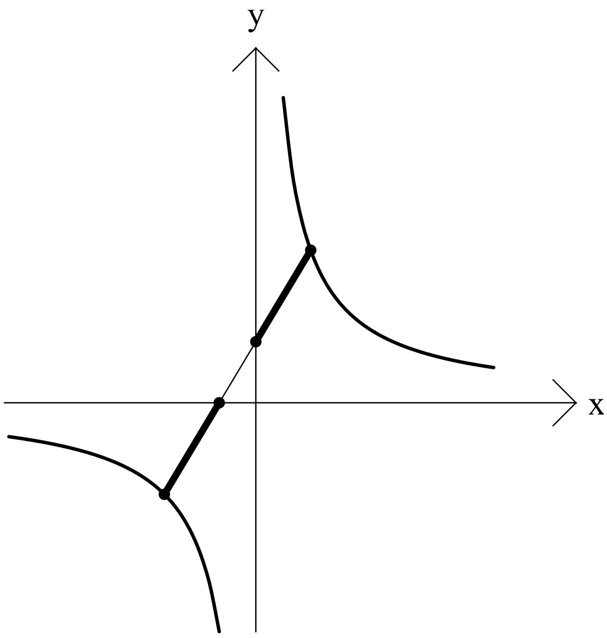
Mit dieser Kenntnis lässt sich die Tangente einfach konstruieren.



Projiziert man den Hyperbelpunkt P senkrecht auf die Achsen, so ist UV zur Tangente parallel.

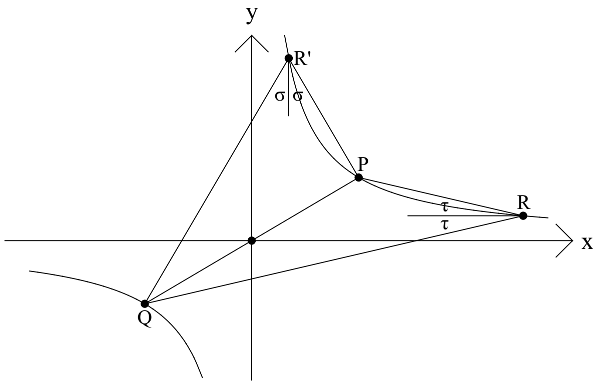
Die **Sehne** durch $A=\begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b \\ 1/b \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y=\frac{-x}{a\cdot b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Sie schneidet die y-Achse in $Y=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \end{pmatrix}$ und die x-Achse in $X=\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $|AY|^2=\begin{pmatrix} a \\ -1/b \end{pmatrix}^2=|BX|^2$.





Insbesondere lässt sich die gesamte Hyperbel aus einem einzigen Punkt und den beiden Asymptoten konstruieren.

Weiteres zu Sehnen



Es seien $P=\begin{pmatrix} p \\ 1/p \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} -p \\ -1/p \end{pmatrix}$, $R=\begin{pmatrix} r \\ 1/r \end{pmatrix}$.

Dann gilt $m_{RP}=-r\cdot p$; $m_{RQ}=r\cdot p$,

also

$$m_{RP}=-m_{RQ},$$

was zu den eingetragenen Winkel-Gleichheiten führt.

R‘ ist ein anderer Punkt auf der Hyperbel, der auf der anderen Seite von QP liegt.

Konjugation

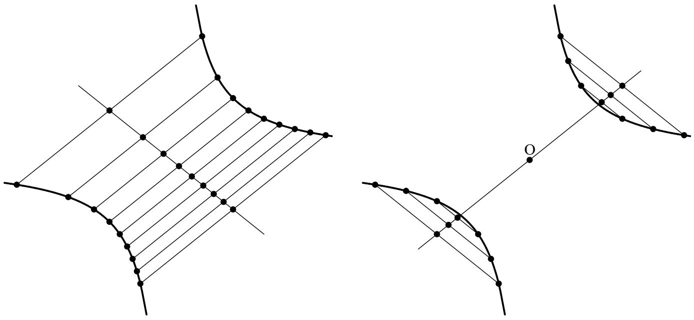
Das Steigungspaar (m, -m) tritt auch an anderer Stelle auf:

Die Gerade durch $H(t)=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ mit der Steigung m schneidet die Hyperbel wieder in

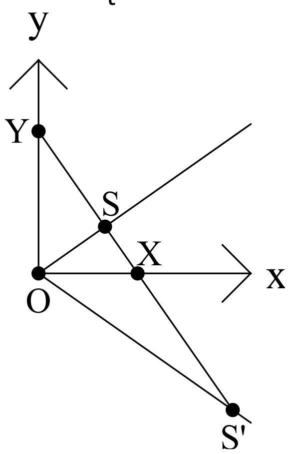
$H\left(\frac{-1}{m\cdot t}\right)=\begin{pmatrix} -1/(m\cdot t \\ -m\cdot t \end{pmatrix}$.

Der Mittelpunkt beider Hyperbelpunkte ist $\dfrac{H(t)+H\left(\frac{-1}{m\cdot t}\right)}{2}=\dfrac{m\cdot t-1/t}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1/m \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Mittelpunkte für verschiedene Werte von t liegen somit auf einer Geraden durch den Ursprung mit der Steigung -m.



Die beiden Steigungen (bzw. zwei zugehörige Geraden) heißen zueinander **konjugiert**. Insbesondere sind die Winkelhalbierenden zweier zueinander konjugierter Geraden zu den Asymptoten parallel. Die Gerade durch den Ursprung O und den Hyperbelpunkt $H=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ hat die Steigung $\frac{1}{t^2}$; sie ist zur Tangente in H konjugiert.



Eine beliebige Gerade mit $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ schneidet die Achsen in $X=\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ und in $Y=\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$. Darauf liegen S und S‘ so, dass OS und OS‘ zueinander konjugiert sind. OS habe die Steigung m und OS‘ die Steigung -m.

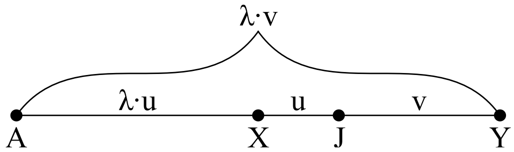
Dann ist $S=\frac{a\cdot b}{a\cdot m+b}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}=\frac{b}{a\cdot m+b}\cdot X+\frac{a\cdot m}{a\cdot m+b}\cdot Y$

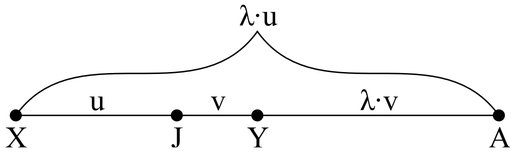
und $S'=\frac{a\cdot b}{-a\cdot m+b}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -m \end{pmatrix}=\frac{b}{-a\cdot m+b}\cdot X-\frac{a\cdot m}{-a\cdot m+b}\cdot Y$.

S und S‘ teilen demnach die Strecke YX harmonisch.

Harmonische Verhältnisse

Die Strecke XY wird durch J im Verhältnis u:v innen durch J geteilt. Dann ist $J=\frac{v\cdot X+u\cdot Y}{u+v}$.



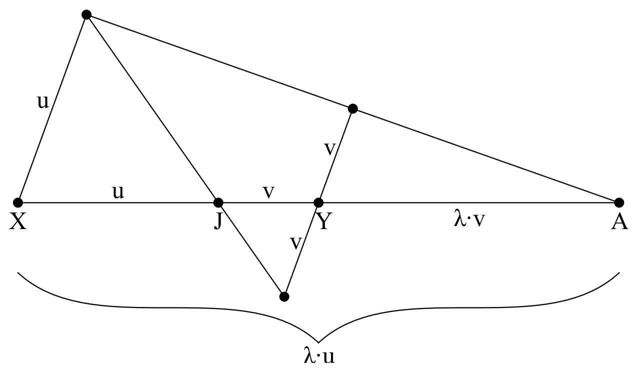


Man kann die Strecke XY auch außen im Verhältnis u:v teilen.

Dann ist links $X=\frac{\lambda\cdot u\cdot Y+(\lambda\cdot v-\lambda\cdot u)\cdot A}{\lambda\cdot v}$, also $A=\frac{v\cdot X-u\cdot Y}{v-u}$.

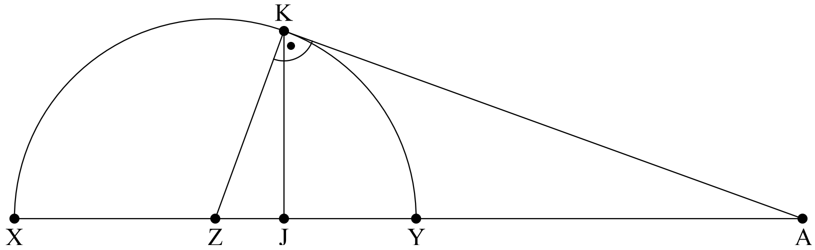
Rechts ist $Y=\frac{(\lambda\cdot u-\lambda\cdot v)\cdot A+\lambda\cdot v\cdot X}{\lambda\cdot u}$, also ebenfalls $A=\frac{u\cdot Y-v\cdot X}{u-v}$.

Zum Mittelpunkt einer Strecke gibt es keinen äußeren Teilungspunkt.



Die Konstruktion der Teilpunkte ergibt sich aus der Graphik mit Hilfe der Strahlensätze.

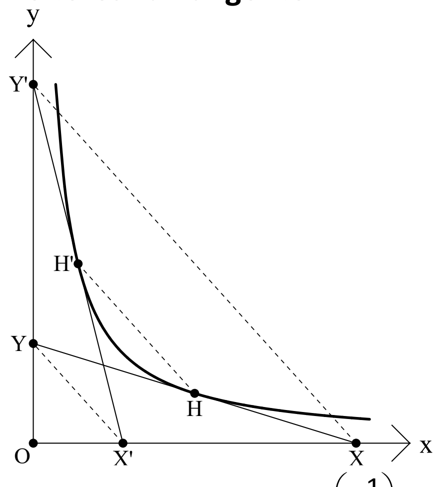
Harmonische Verhältnisse hat man insbesondere bei der Kreisinversion:



Wir haben einen Kreis über XY mit dem Radius r und dem Mittelpunkt Z. Aufgrund des Kathetensatzes gilt in der Graphik $|ZK|^2 = \boxed{r^2 = |ZJ| \cdot |ZA|}$. Dann teilen J und A die Strecke XY harmonisch wegen der Äquivalenzkette

$$\frac{|XJ|}{|JY|} = \frac{|XA|}{|AY|} \iff \frac{r + |ZJ|}{r - |ZJ|} = \frac{r + |ZA|}{|ZA| - r} \iff r \cdot |ZA| - r^2 + |ZJ| \cdot |ZA| - r \cdot |ZJ| = r^2 + r \cdot |ZA| - r \cdot |ZJ| - |ZJ| \cdot |ZA| .$$

Weiteres zu Tangenten

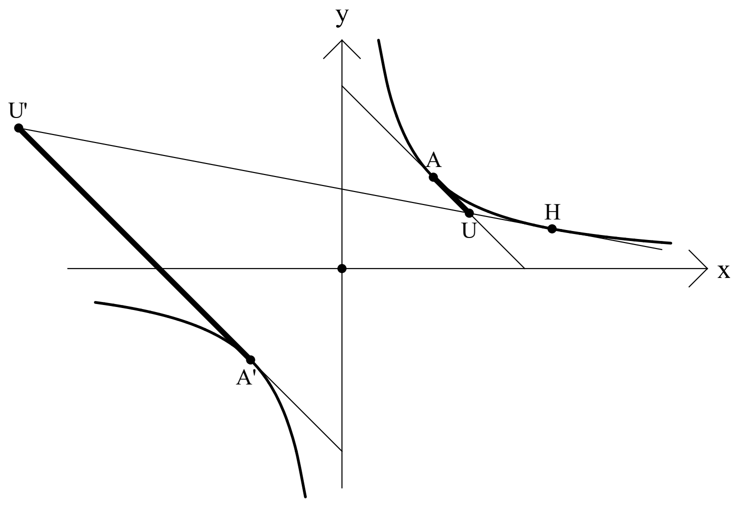


Die Tangente in $H = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ schneidet die Koordinatenachsen in $X = \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/t \end{pmatrix}$. Analoges gilt für $H' = \begin{pmatrix} s \\ 1/s \end{pmatrix}$.

Es ist also $OX \cdot OY = OX' \cdot OY'$.

YX‘ und Y’X und H’H haben alle die Steigung $\frac{-1}{s \cdot t}$ und sind somit zueinander parallel.

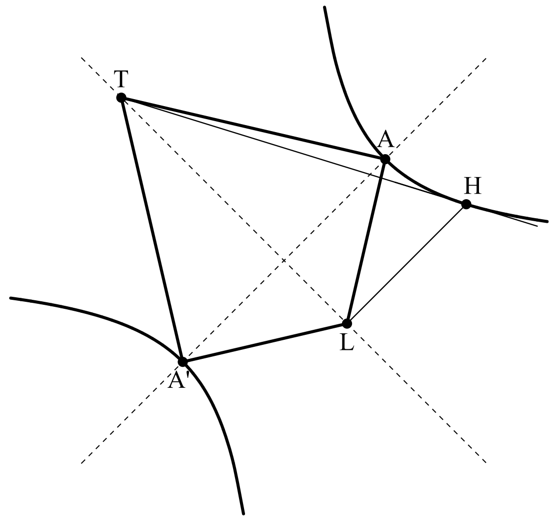
Die Scheiteltangente in $A' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $x + y = -2$; die Scheiteltangente in $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $x + y = 2$. Die Tangente in $H = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $x + t^2 \cdot y = 2 \cdot t$.



Sie schneidet die Tangente in A' im Punkt $U'=\frac{2}{t-1}\cdot\begin{pmatrix}-t\\1\end{pmatrix}$ mit $|U'A'|=\sqrt{2}\cdot\left|\frac{t+1}{t-1}\right|$ und die Tangente in A im Punkt $U=\frac{2}{t+1}\cdot\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ mit $|UA|=\sqrt{2}\cdot\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$.

Damit ist stets $|U'A'|\cdot|UA|=2$.

Das Produkt der beiden fetten Strecken ist stets 2.



In der Graphik links wurde das Koordinatensystem weggelassen, und die Symmetrieachsen sind strichliert. Die Tangente im Hyperbelpunkt $H=\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y=\frac{-x}{t^2}+\frac{2}{t}$ und schneidet die Neben-Symmetrieachse in $T=\frac{2\cdot t}{t^2-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, und das Lot von H auf diese Achse ist $L=\frac{t^2-1}{2\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Mit $A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $A'=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ und $s=\frac{2\cdot t}{t^2-1}$ hat man die Steigungen

$$m_{TA}=\frac{1-s}{1+s},\ m_{TA'}=\frac{1+s}{1-s},\ m_{LA}=\frac{1+s}{s-1},\ m_{LA'}=\frac{s-1}{s+1}\text{, also ist }\boxed{TA\perp AL,\ TA'\perp A'L}.$$

Normalen

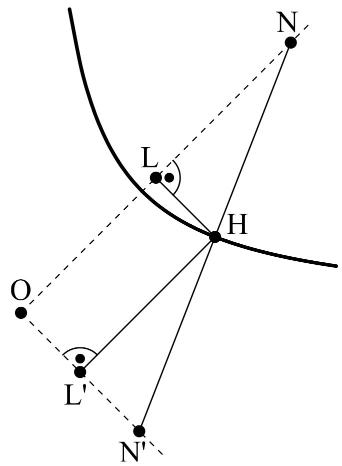
In $H=\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}$ wird die Normale mit der Gleichung $y=t^2\cdot(x-t)+\frac{1}{t}$ errichtet.

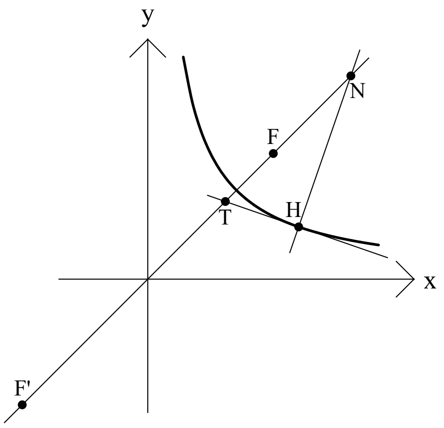
Diese schneidet die Haupt-Symmetrieachse mit $y=x$ in

$N=\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und die Neben-Symmetrieachse mit $y=-x$ in

$N'=\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Dann ist $N-H=\begin{pmatrix}1/t\\t\end{pmatrix}=H-N'$, also $|HN|=|HN'|$.

Das Lot $L=\frac{t^2+1}{2\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ von H auf die Haupt-Symmetrieachse mit $y=x$ halbiert die Strecke ON. Das Lot $L'=\frac{t^2-1}{2\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ von H auf die Neben-Symmetrieachse mit $y=-x$ halbiert die Strecke ON'.





Es sei H der Hyperbelpunkt $H=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$.

Die Tangente in H schneidet F’F in $T=\frac{t\cdot\sqrt{2}}{t^2+1}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

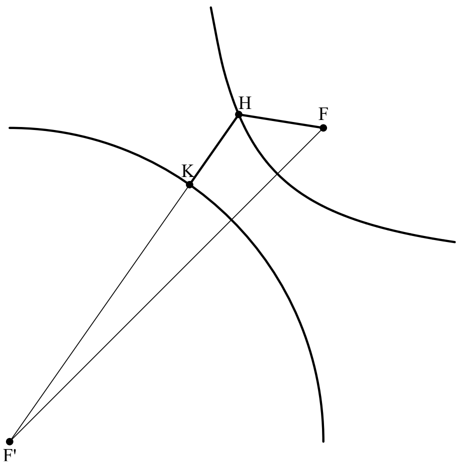
Die Normale in H schneidet F’F in $N=\frac{t^2+1}{t\cdot\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Wegen $T=\frac{t\cdot\sqrt{2}+\left(t^2+1\right)}{2\cdot\left(t^2+1\right)}\cdot F+\frac{-\sqrt{2}\cdot t+\left(t^2+1\right)}{2\cdot\left(t^2+1\right)}\cdot F'$ und $N=\frac{t\cdot\sqrt{2}+t^2+1}{2\cdot t\cdot\sqrt{2}}\cdot F+\frac{t\cdot\sqrt{2}-\left(t^2+1\right)}{2\cdot t\cdot\sqrt{2}}\cdot F'$ teilen T und N die Strecke F’F harmonisch.

Ein synthetischer Weg zu den Leitlinien

Ein synthetischer Weg[1] zur Leitlinie ist der folgende:
Ausgangspunkt ist der (fette) Leitkreis um F‘ mit Radius $2\cdot\sqrt{2}$. Zum Kreis-Punkt K gehört der Hyperbel-Punkt H. Von der Hyperbel ist rechts nur der rechte Ast eingezeichnet.

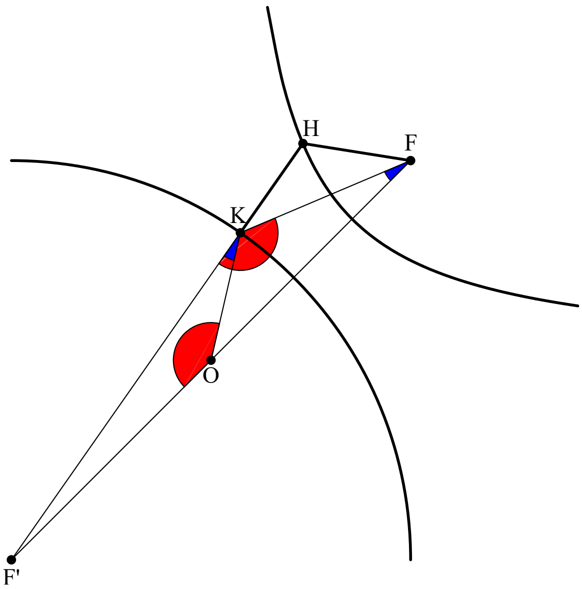
Dann ist $\lambda=\frac{|F'K|}{|F'F|}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Mit dem Koordinaten-Ursprung O ist $|F'O|=2$ und deshalb

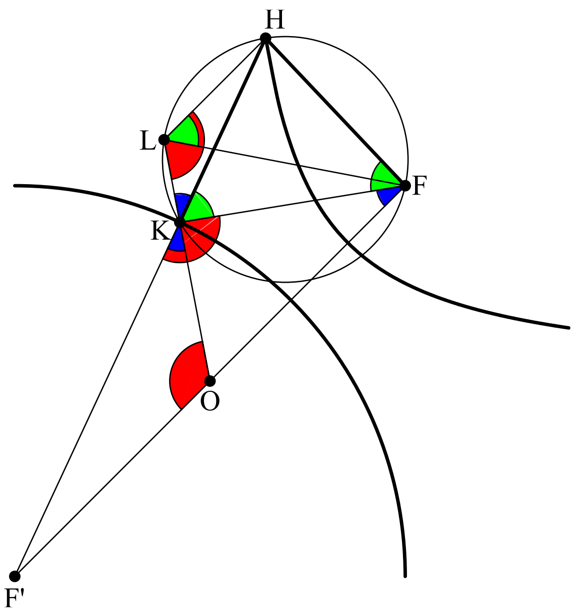
$$\lambda=\frac{|F'K|}{|F'F|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{|F'O|}{|F'K|}.$$

Die Dreiecke F’FK und F’KO sind daher ähnlich zueinander.
Gleichfarbige Winkel haben gleiche Größe.



[1] Idee: H. G. Zeuthen (1882): Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. Leipzig: Teubner, S. 32 f.

Wegen $|HK| = |HF|$ haben die grünen Winkel gleiche Größe, und es ist $\text{rot} + \text{grün} = 180°$.
Nun sei HL zur Hauptachse der Hyperbel parallel und L auf KO.
Die Winkel über HK ergänzen sich zu 180°, also liegen H, K, F, L auf einem Kreis.
Dann sind über HF die Winkel bei K und bei L von gleicher Größe.
Im Dreieck OFL hat der Winkel bei O die Größe $180° - \text{rot} = \text{grün}$, und der Winkel bei F hat die Größe $180° - (\text{rot} - \text{grün}) - (\text{grün}) = \text{grün}$,
daher ist das Dreieck OFL gleichschenklig, und die Lotgerade durch L zu OF Mittelsenkrechte zu OF.



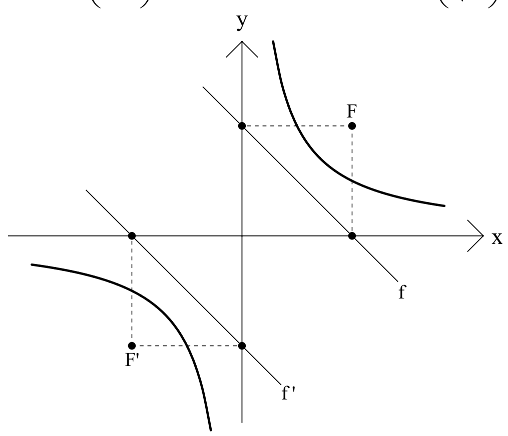
Weiterhin ist $\frac{|HL|}{|HF|} = \frac{|HL|}{|HK|} = \frac{|F'O|}{|F'K|} = \lambda$. Da HL nach Konstruktion zur Hauptachse F'F parallel ist, ist HL senkrecht zur erwähnten Mittelsenkrechten. Diese heißt **Leitlinie** und hat die Eigenschaft, dass für alle Hyperbelpunkte H der Abstand zwischen H und F genau $\sqrt{2}$ -mal so groß ist wie der Abstand zwischen H und der Leitlinie.

Die Mittelsenkrechte zu $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}$ in Normalenform bzw. $x + y = \sqrt{2}$. Sie schneidet die x-Achse in $X = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und die y-Achse in $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

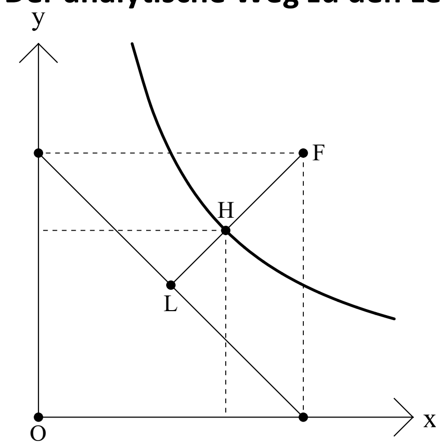
Es gibt die zu F gehörige Leitlinie f und die zu F' gehörige Leitlinie f'.

Die Leitlinien sind die Geraden durch $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

bzw. durch $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.



Der analytische Weg zu den Leitlinien



Die zu F gehörige Leitlinie enthält den Punkt L als Lot von H auf diese Leitlinie.

Für $H=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ist $|OH|=\sqrt{2}$, $|OF|=2$, $|OL|=1$ und daher

$|HF|=2-\sqrt{2}$ und $|HL|=\sqrt{2}-1$, was zu $\frac{|HF|}{|HL|}=\sqrt{2}$ führt.

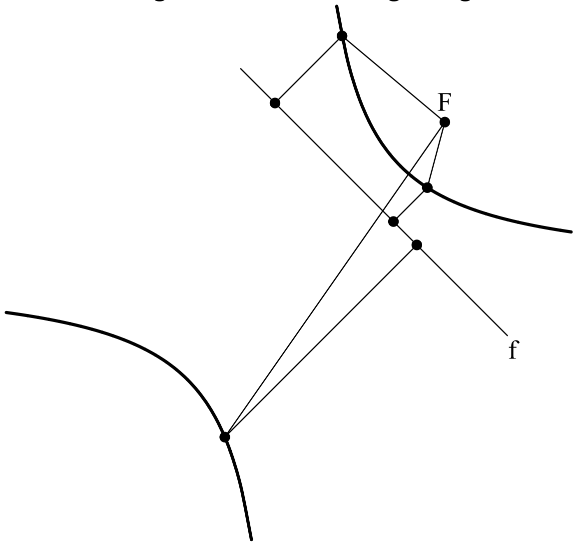
Der Abstand von $H=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ zu F ist $\sqrt{2}$-mal so groß wie der Abstand von H zur (zu F gehörigen) Leitlinie.

Dies gilt auch für andere Hyperbelpunkte:

Der Abstand von $H=\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}$ im I. Quadranten zu $F=\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ wurde oben berechnet zu

$|HF|=\left(t+\frac{1}{t}\right)-\sqrt{2}$. Der Lotpunkt von H auf die Leitlinie mit $x+y=\sqrt{2}$ ist $L=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}+t-\frac{1}{t}\\\sqrt{2}-t+\frac{1}{t}\end{pmatrix}$. Dann ist

$H-L=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+t+\frac{1}{t}\\-\sqrt{2}+t+\frac{1}{t}\end{pmatrix}=\frac{|HF|}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, also tatsächlich $|HL|=\frac{|HF|}{2}\cdot\sqrt{2}$. Hyperbelpunkte im III. Quadranten werden analog behandelt. Damit gilt allgemein für alle Hyperbelpunkte:



Der Abstand von $H(t)$ zu F ist $\sqrt{2}$-mal so groß wie der Abstand von $H(t)$ zur (zu F gehörigen) Leitlinie:

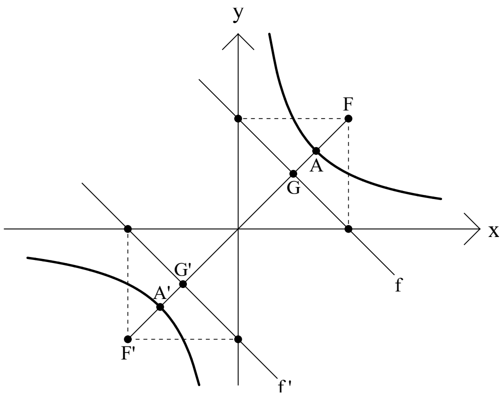
$$\boxed{\mathrm{dist}(H,F)=\sqrt{2}\cdot\mathrm{dist}(H,f)}$$

(Für Parabel-Punkte ist deren Abstand zum Brennpunkt genau so groß wie deren Abstand zur Leitlinie.)

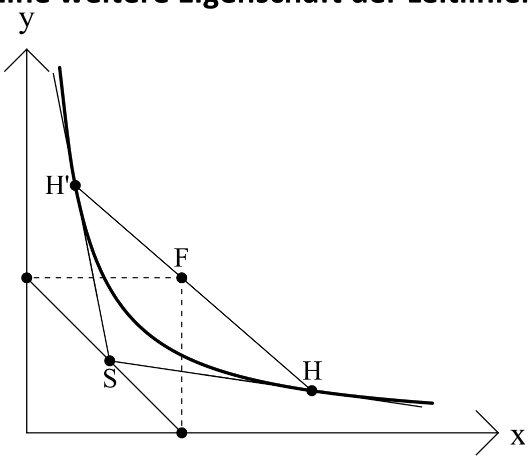
Leitlinien-Harmonie

Die Leitlinien haben die Gleichungen $f: x+y=\sqrt{2}$ und $f': x+y=-\sqrt{2}$. Sie treffen die Symmetrieachse durch F‘ und F in $G=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $G'=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

Dann gilt $\frac{|A'G|}{|GA|}=\frac{|A'F|}{|FA|}$; A’A wird also durch G und F harmonisch geteilt.



Eine weitere Eigenschaft der Leitlinien



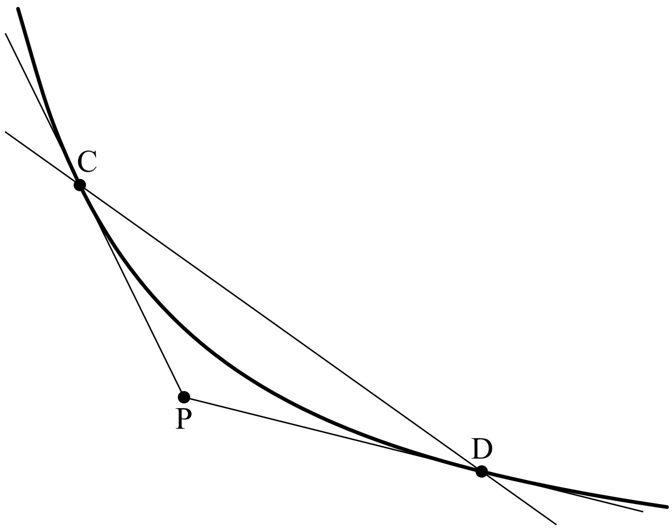
Es sei $H=\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}$ ein Hyperbelpunkt.

Die Sehne durch H und den Brennpunkt F trifft die Hyperbel wieder in $H'=\begin{pmatrix}s\\1/s\end{pmatrix}$ mit $s=\frac{t-\sqrt{2}}{t\cdot\sqrt{2}-1}$. Die Tangenten in H und in H‘ treffen einander in $S=\frac{2}{t+s}\cdot\begin{pmatrix}s\cdot t\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ mit $\xi+\eta=\sqrt{2}$.

S liegt daher auf der Leitlinie zu F.

Polaren

Die Tangente im Punkt $C=\begin{pmatrix}c\\1/c\end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y=\frac{-x}{c^2}+\frac{2}{c}$.



Vom Punkt $\boxed{P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}}$ aus lassen sich zwei Tangenten legen; die Berührpunkte seien $C=\begin{pmatrix}c\\1/c\end{pmatrix}$ und $D=\begin{pmatrix}d\\1/d\end{pmatrix}$.

Da P auf jeder der Tangenten liegt, gilt $v=\frac{-u}{c^2}+\frac{2}{c}$ und $v=\frac{-u}{d^2}+\frac{2}{d}$ bzw.

$v\cdot c+\frac{u}{c}=2$ und $v\cdot d+\frac{u}{d}=2$, d.h. die Punkte C und D liegen auf der Geraden mit $\boxed{v\cdot x+u\cdot y=2}$.

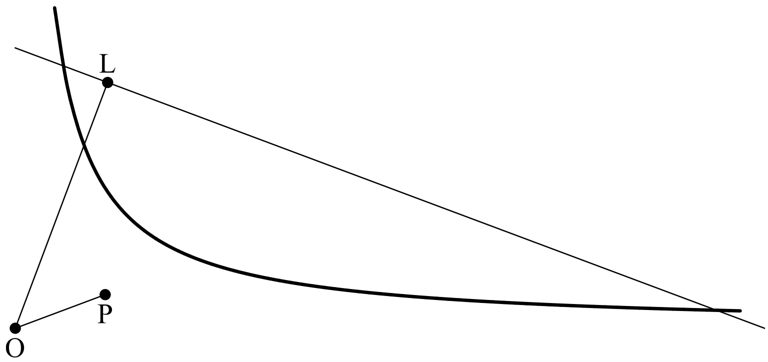
Diese Gerade heißt **Polare** zu $P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$. Umgekehrt gehört zur Geraden mit $y=m\cdot x+n$ der Pol $\frac{2}{n}\cdot\begin{pmatrix}1\\-m\end{pmatrix}$. Geraden mit $n=0$ haben keinen Pol.

Der Punkt $P=\begin{pmatrix}u\\0\end{pmatrix}$ auf einer Asymptote hat als Polarengleichung $y=\frac{2}{u}$, also eine Parallele zur dieser Asymptote. Der Hyperbelpunkt $\begin{pmatrix}u\\1/u\end{pmatrix}$ liegt genau zwischen P und dessen Polare.

Der Punkt $P=\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ auf einer Asymptote hat $x=\frac{2}{v}$ als Polarengleichung, also eine Parallele zu dieser Asymptote. Der Hyperbelpunkt $\begin{pmatrix}1/v\\v\end{pmatrix}$ liegt genau zwischen P und dessen Polare.

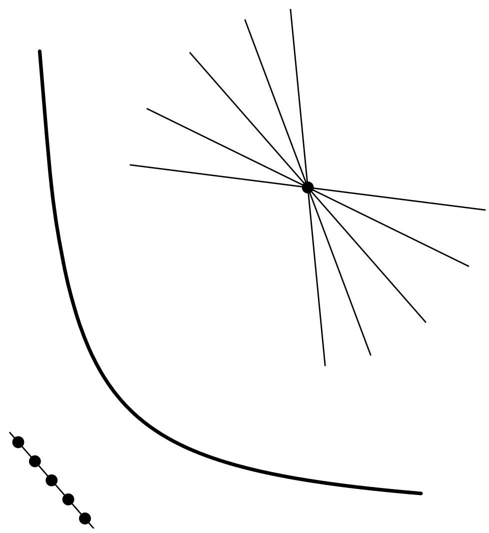
Liegt $P=\begin{pmatrix}u\\1/u\end{pmatrix}$ auf der Kurve, hat die Polare die Form $\frac{x}{u}+u\cdot y=2$ bzw. $y=-\frac{x}{u^2}+\frac{2}{u}$; es handelt sich somit um die Tangente in P.

Der Lotpunkt des Ursprungs auf die Polare von P ist $L=\frac{2}{u^2+v^2}\cdot\begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix}$. Der Abstand von L zum Ursprung ist $|OL|=\frac{2}{u^2+v^2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}=\frac{2}{|OP|}$, also ist $\boxed{|OL|\cdot|OP|=2}$.



Es gilt der übliche Pol-Polaren-Mechanismus: Wandert P auf einer Geraden q, so dreht sich die Polare zu P um einen Punkt Q, und q ist die Polare zu Q.

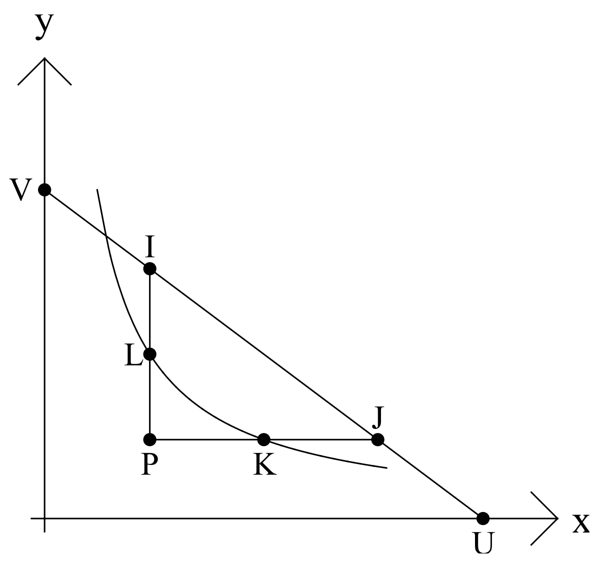
Damit gibt es Polaren auch für Punkte innerhalb der Hyperbel.



Die Polare des Brennpunkts $F=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ergibt sich zu $x+y=\sqrt{2}$, und diese Gerade ist die (zu F gehörige) Leitlinie.

Konstruktion der Polaren

Die Polare zu $P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ mit der Gleichung $v\cdot x+u\cdot y=2$ schneidet die x-Achse in $U=\begin{pmatrix}2/v\\0\end{pmatrix}$ und die y-Achse in $V=\begin{pmatrix}0\\2/u\end{pmatrix}$.



Die Gerade $j: y = v$ durch $P = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ schneidet die Polare $p:\ v \cdot x + u \cdot y = 2$ zu P in $J = \begin{pmatrix} 2/v - u \\ v \end{pmatrix}$ und die Hyperbel in $K = \begin{pmatrix} 1/v \\ v \end{pmatrix}$.

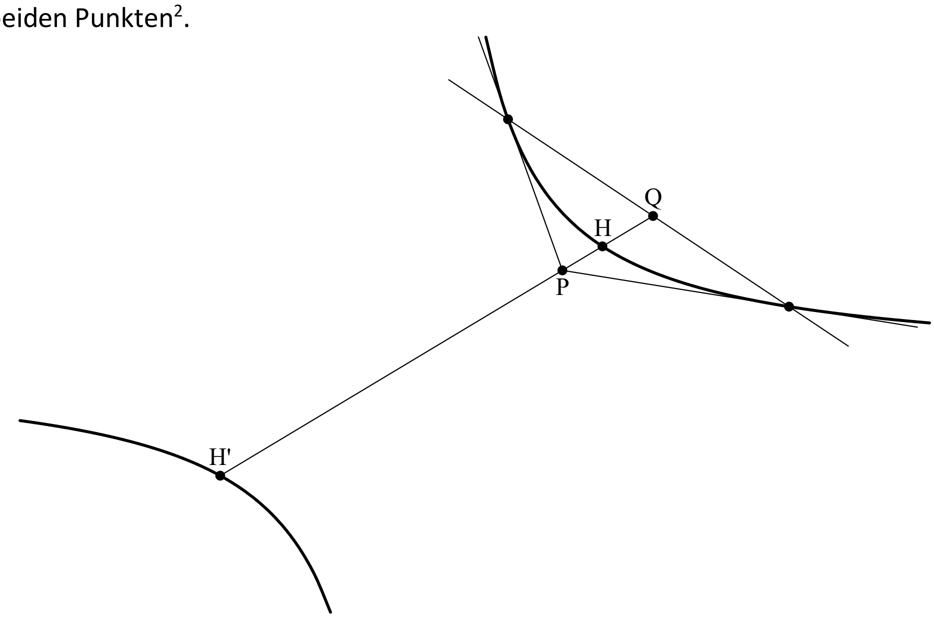
Es ist $\frac{J+P}{2} = K$.

Die Gerade $i: x = u$ durch $P = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ schneidet die Polare $p:\ v \cdot x + u \cdot y = 2$ zu P in $I = \begin{pmatrix} u \\ 2/u - v \end{pmatrix}$ und die Hyperbel in $L = \begin{pmatrix} u \\ 1/u \end{pmatrix}$. Es ist $\frac{I+P}{2} = L$.

Dies liefert eine weitere Möglichkeit, die Polare zu P zu konstruieren: Man ermittle K und L und spiegele P an diesen beiden Punkten[2].

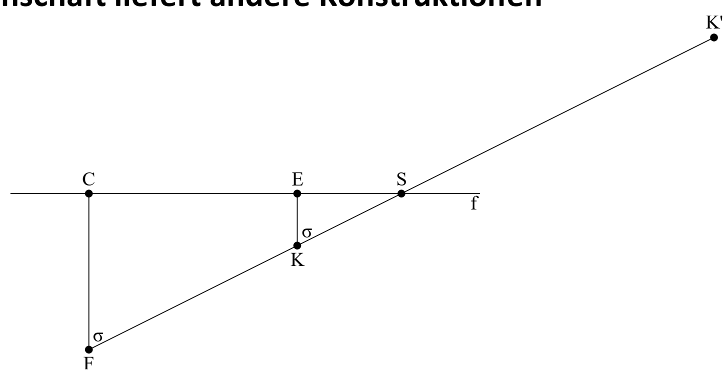
Pol-Polaren-Harmonie

Eine beliebige Gerade durch den Punkt P schneidet dessen Polare in Q und die Hyperbel in H und H'.
Man kann nachrechnen, dass $\frac{|PH|}{|HQ|} = \frac{|PH'|}{|H'Q|}$ gilt, d.h. die Strecke H'H wird durch P und Q harmonisch geteilt.



Die Brennpunkt-Leitlinien-Eigenschaft liefert andere Konstruktionen

Gesucht sind alle Punkte K, deren Abstände zum Brennpunkt F und zur Leitgeraden f in einem konstanten Verhältnis λ stehen. Eine veränderliche Gerade durch F schneide die Leitgerade in S. K sei ein (noch festzulegender) Punkt auf der veränderlichen Geraden FS. C und E seien die Lotpunkte von F und K auf f.



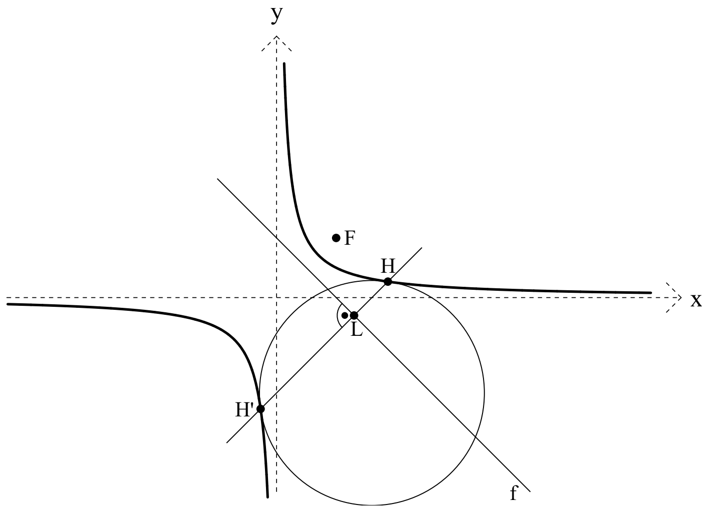
Es soll $\frac{KF}{KE} = \lambda$ sein. Wegen $\cos\sigma = \frac{KE}{KS} = \frac{FC}{FS}$ muss $\frac{FK}{KS} = \lambda \cdot \frac{KE}{KS} = \lambda \cdot \cos\sigma$ sein. Man teile also die Strecke FS im Verhältnis $\frac{\lambda \cdot \cos\sigma}{1}$ (es gibt einen inneren Teilpunkt K und einen äußeren Teilpunkt K').

[2] Hintze beschreibt in MNU 1962/63, S. 35 f. den Sachverhalt für beliebige Hyperbeln.

Setzt man $F=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ und $f: x+y=\sqrt{2}$ sowie $\lambda=\sqrt{2}$, bekommt man die Hyperbel zu $y=\frac{1}{x}$.

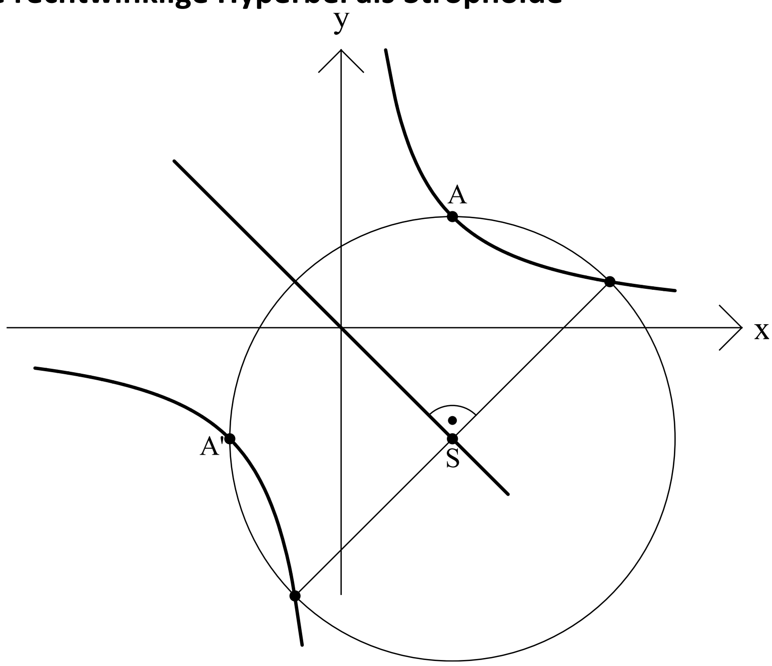
(Es ist zu beachten, dass man bei der Steigung von FS nicht $\cot\sigma$, sondern $\cot(\sigma+45°)$ zu bilden hat.)

Natürlich hätte man bei der Konstruktion gemäß der Brennpunkt-Leitlinien-Eigenschaft auch den Kreis des APOLLONIUS[3] verwenden können: L wandere auf der Leitgeraden f. Die Senkrechte zu f durch L schneidet den APOLLONIUS-Kreis zu L und F mit dem Teilverhältnis $\frac{\sqrt{2}}{1}$ in den Kurvenpunkten H und H' mit $\frac{|HF|}{|HL|}=\frac{|H'F|}{|H'L|}=\sqrt{2}$.



Eine andere Konstruktion: Die rechtwinklige Hyperbel als Strophoide[4]

Der Punkt S wandere auf der (fetten) Geraden mit $y=-x$, hat also die Form $S=\begin{pmatrix}s\\ -s\end{pmatrix}$. Es sei $A=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ein fester Punkt. Der Kreis um um S durch B hat den Radius $\sqrt{2\cdot(s^2+1)}$. Die Gerade durch S mit der Steigung 1 hat die Gleichung $y=x-2\cdot s$ und schneidet den Kreis in $\begin{pmatrix}s\pm\sqrt{s^2+1}\\ -s\pm\sqrt{s^2+1}\end{pmatrix}$, also auf der Hyperbel mit $x\cdot y=1$.

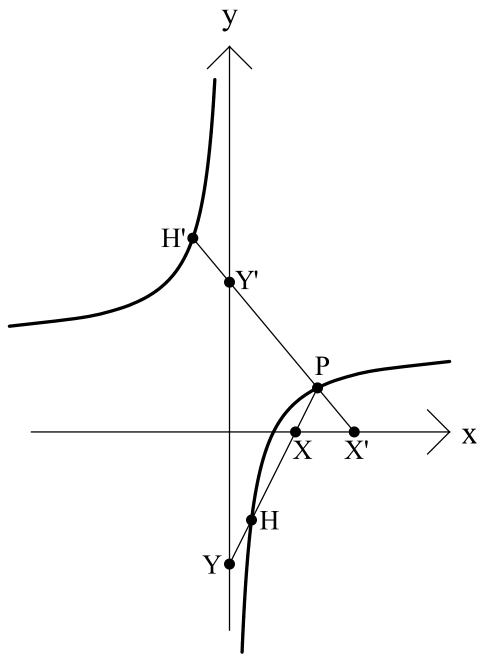


[3] Der APOLLONIUS-Kreis zu den Punkten A und B und zum Teilverhältnis λ besteht aus allen Punkten P mit $\frac{|PA|}{|PB|}=\lambda$. Für $\lambda=1$ ergibt sich die Mittelsenkrechte zu A und zu B.

[4] Eine Strophoide zu einer Kurve (hier: einer Geraden), einem festen Punkt A und einem weiteren Punkt (hier: dem Fernpunkt der Senkrechten zur Geraden) wird folgendermaßen konstruiert: S wandere auf der Geraden. Die Senkrechte zur Geraden durch S schneidet den Kreis um S durch A in zwei Kurvenpunkten. Strophoiden müssen keine Hyperbeln sein, sondern können ganz unterschiedliche Formen annehmen.

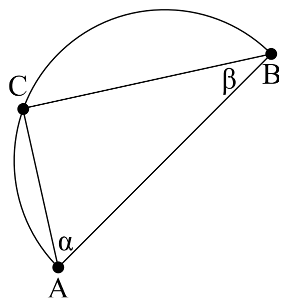
Eine weitere Konstruktion: Die rechtwinklige Hyperbel als Kissoide[5] (Zissoide)

Es sei $P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ ein Punkt und $y=m\cdot(x-u)+v$ die Gleichung einer Geraden durch P. Diese schneidet die x-Achse in $X=\begin{pmatrix}u-v/m\\0\end{pmatrix}$ und die y-Achse in $Y=\begin{pmatrix}0\\v-m\cdot u\end{pmatrix}$. Trägt man den Vektor $\overrightarrow{XY}$ an P ab, bekommt man $P+Y-X=\begin{pmatrix}0\\2\cdot v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v/m\\-m\cdot u\end{pmatrix}$, also eine nach oben verschobene rechtwinklige Hyperbel als Ortskurve, wenn m variiert wird.

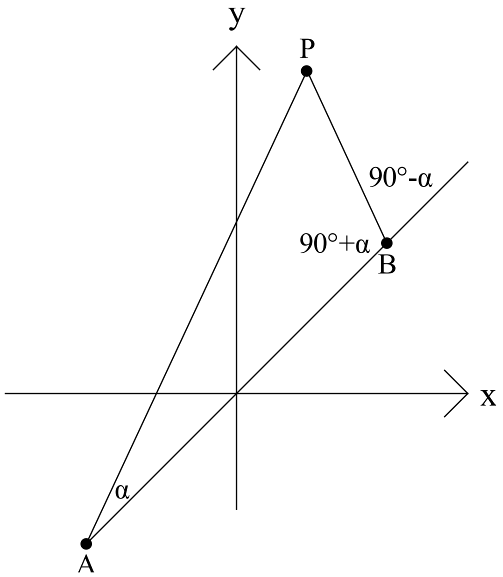


Ein Analogon zum Satz des THALES

Ist in der Skizze $\beta=90°-\alpha$, so liegt C auf dem THALESkreis über AB.



Was ändert sich, wenn nicht $\beta=90°-\alpha$, sondern $\beta=90°+\alpha$ ist?



Mit $A=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ gilt:

AP hat die Steigung $m=\tan(45°+\alpha)$,

BP hat die Steigung

$\tan(135°-\alpha)=\tan(180°-(45°+\alpha))=-m$.

Daher ist

$$AP:\ y=m\cdot(x+1)-1$$

$$BP:\ y=-m\cdot(x-1)+1$$

Beide Geraden schneiden einander in

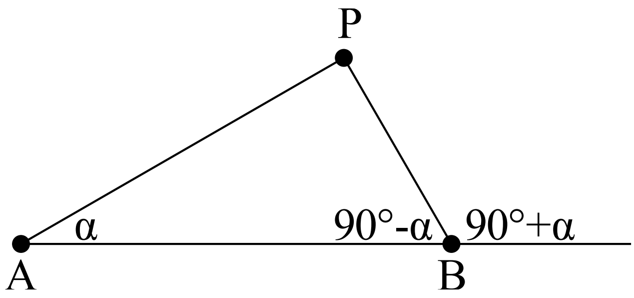
$$P=\begin{pmatrix}1/m\\m\end{pmatrix}.$$

Für verschiedene Werte von α liegt P stets auf der Hyperbel zu y=1/x.

Übersichtlicher wird es, wenn man die Konfiguration um 45° dreht:

---

[5] Eine Kissoide zu einem festen Punkt P und zu zwei gegebenen Kurven (hier: den beiden Koordinatenachsen) wird folgendermaßen konstruiert: Eine sich drehende Gerade durch P schneide die beiden Kurven in X und in Y. Dann besteht die Kissoide aus allen Punkten K mit $\overrightarrow{XP}=\overrightarrow{YK}$. Kissoiden müssen keine Hyperbeln sein, sondern können ganz unterschiedliche Formen annehmen.



Mit $A=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ gilt wegen

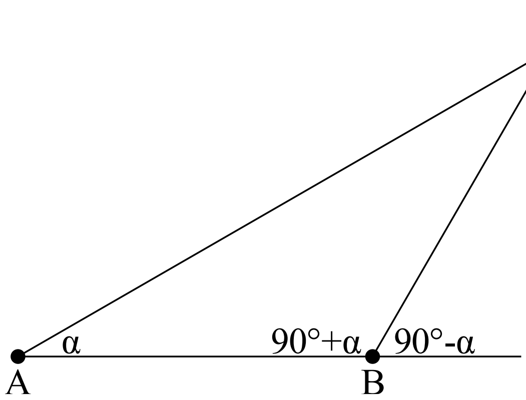
$AP: y=\tan\alpha\cdot(x-1);\ BP:\ y=-\cot\alpha\cdot(x+1)$

die Beziehung

$$1=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\frac{y}{x-1}\cdot\frac{-y}{x+1}$$

und damit $x^2+y^2=1$.

Für verschiedene Werte von α durchläuft P einen Kreis.



Mit $A=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ gilt wegen

$AP: y=\tan\alpha\cdot(x-1);\ BP:\ y=\cot\alpha\cdot(x+1)$

die Beziehung

$$1=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\frac{y}{x-1}\cdot\frac{y}{x+1}$$

und damit $x^2-y^2=1$.

Für verschiedene Werte von α durchläuft P eine rechtwinklige Hyperbel.

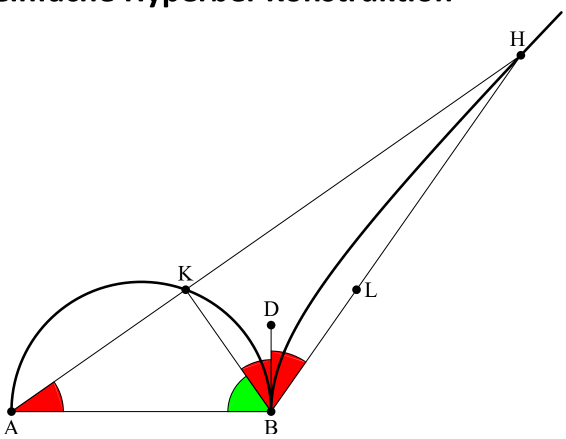
Eine auf dem THALES-Analogon beruhende einfache Hyperbel-Konstruktion

K durchlaufe den THALESkreis über AB. BD sei senkrecht zu AB. Spiegelt man BK an BD, erhält man BL. Dann sei H der Schnittpunkt von AK mit BL.

Mit $A=\begin{pmatrix}-r\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}$, $C=r\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ ist

$L=r\cdot\begin{pmatrix}2-\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ und

$AK: y=\frac{\sin\alpha}{r+\cos\alpha}\cdot(x+r);\ BL: y=\frac{\sin\alpha}{r-\cos\alpha}\cdot(x-r)$



mit dem Schnittpunkt $H=\frac{r}{\cos\alpha}\cdot\begin{pmatrix}r\\\sin\alpha\end{pmatrix}$. Ferner ist $\text{rot}=\alpha$, $\text{grün}=90°-\alpha$ und $\sphericalangle ABH=90°+\alpha$.

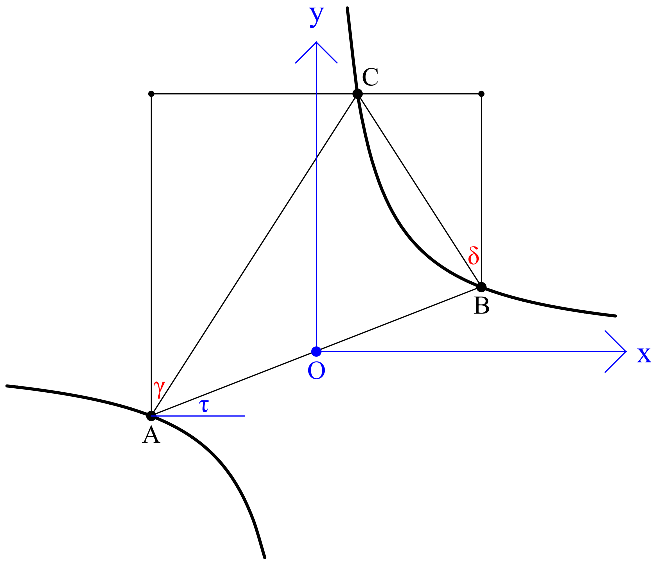
Der rechte Hyperbelast besteht somit aus allen Punkten H, deren Winkeldifferenz $\sphericalangle ABH-\sphericalangle HAB=90°$ beträgt im Kontrast zum THALESkreis, der aus allen Punkten K besteht, deren Winkelsumme $\sphericalangle ABK+\sphericalangle KAB=90°$ beträgt.

Verallgemeinerungen des THALES-Analogons

Gegeben sei die rechtwinklige Einheitshyperbel mit $x \cdot y = 1$ und eine Mittelpunktssehne AB mit $A = \begin{pmatrix} a \\ 1/a \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -a \\ -1/a \end{pmatrix}$ sowie ein weiterer Hyperbelpunkt $C = \begin{pmatrix} c \\ 1/c \end{pmatrix}$. Dann ist

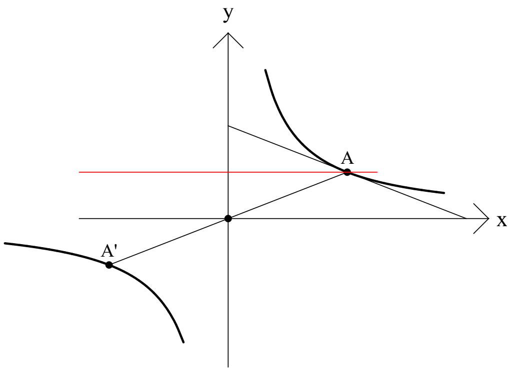
$$\tan\gamma = \frac{c+a}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}} = a \cdot c \text{ und } \tan\delta = \frac{a-c}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}} = a \cdot c,$$

also ist $\gamma = \delta$.

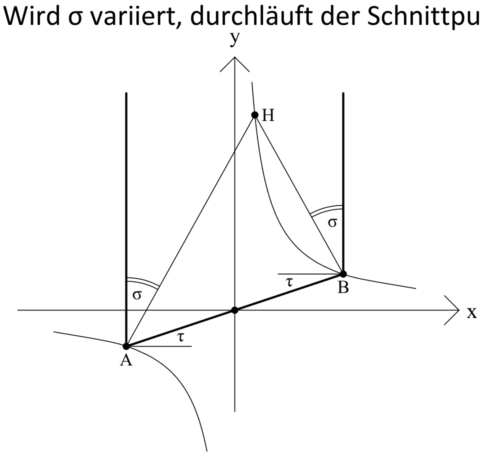


AB bildet mit der positiven x-Achse den Winkel τ mit $\tan\tau = \frac{1}{a^2}$. Im Dreieck ABC hat der Winkel bei A die Größe $\alpha = 90° - \gamma - \tau$ und der Winkel bei B die Größe $\beta = 90° - \delta$, also ist $\boxed{\beta = \alpha + \tau}$ für jeden Punkt C auf der Hyperbel.

Aus dem Bisherigen ergeben sich einige Folgerungen:
Zunächst fällt ein trivialer Befund an:
Spiegelt man die Tangente zu A an der durch A verlaufenden Parallelen zur Rechtsachse, bekommt man eine Ursprungsgerade, die A mit dem Spiegelpunkt A' verbindet.



Interessanter ist der folgende Sachverhalt, der auch zu einer weiteren Konstruktionsmöglichkeit führt:
Der von A ausgehende Strahl bildet mit der Parallelen zur Hochachse durch A den Winkel σ, und der von B ausgehende Strahl bildet mit der Parallelen zur Hochachse durch B auch den Winkel σ.
Wird σ variiert, durchläuft der Schnittpunkt H beider Strahlen eine Kurve.



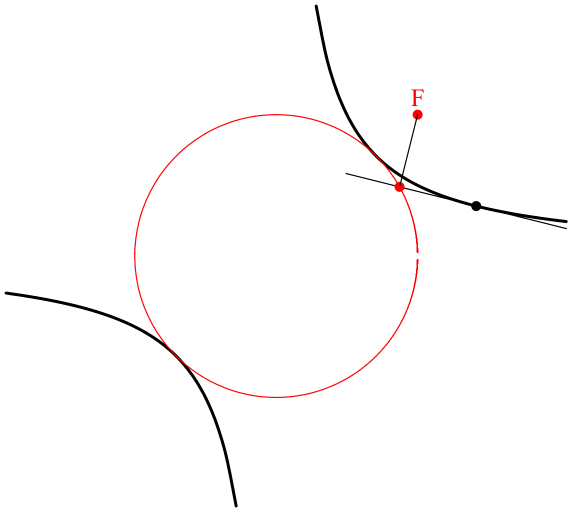
Mit $A = \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ und $m = \cot\sigma$ ist

$$\text{AH: } y = m \cdot (x+u) - v; \text{ BH: } y = -m \cdot (x-u) + v$$

und daher $m = \frac{y+v}{x+u} = \frac{v-y}{x-u}$ bzw. $x \cdot y = v \cdot u$.
Die Kurve ist somit eine rechtwinklige Hyperbel.
Im Dreieck ABH hat der Winkel bei A den Wert $\alpha = 90° - \tau - \sigma$ und der Winkel bei B den Wert $\beta = \tau + 90° - \sigma$. Stets ist $\beta - \alpha = 2 \cdot \tau$, also eine Konstante.

Fußpunktkurven

Fällt man von einem festen Punkt Q die Lote auf die Tangenten, erhält man die Fußpunkt- oder Pedalkurve.



Ist Q ein Brennpunkt, bekommt man einen Kreis um den Ursprung:

Die Tangente in $H=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ hat den allgemeinen

Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}}_{A} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} t^2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{R}$.

Gesucht ist der Lotfußpunkt L von $F=\underbrace{\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Q}$.

Es ist (nach der Formel im Abschnitt über Vektorgeometrie)

$$L=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}+\frac{\begin{pmatrix} -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2}-t \\ \sqrt{2}-1/t \end{pmatrix}}{1+t^4}\cdot\begin{pmatrix} -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}+\frac{t^3-t^2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}-1/t}{1+t^4}\cdot\begin{pmatrix} -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+t^4}\cdot\begin{pmatrix} t+t^5-t^5+t^4\cdot\sqrt{2}-t^2\cdot\sqrt{2}+t \\ 1/t+t^3+t^3-t^2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}-1/t \end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{1+t^4}\cdot\begin{pmatrix} t\cdot\left(t^3-t+\sqrt{2}\right) \\ t^3\cdot\sqrt{2}-t^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

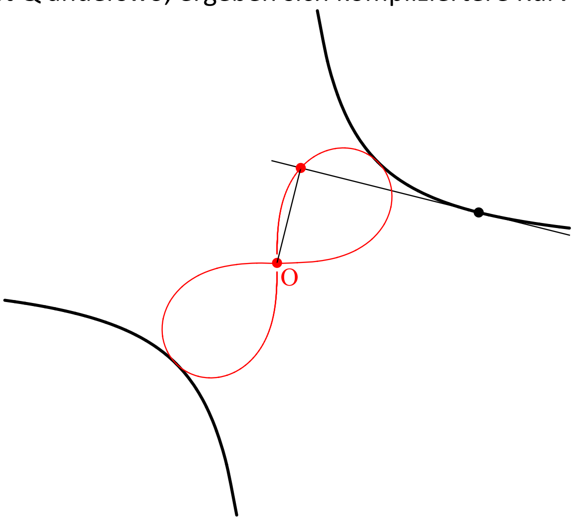
Wegen $\boxed{1+t^4=\left(t^2+t\cdot\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(t^2-t\cdot\sqrt{2}+1\right)}$ ist

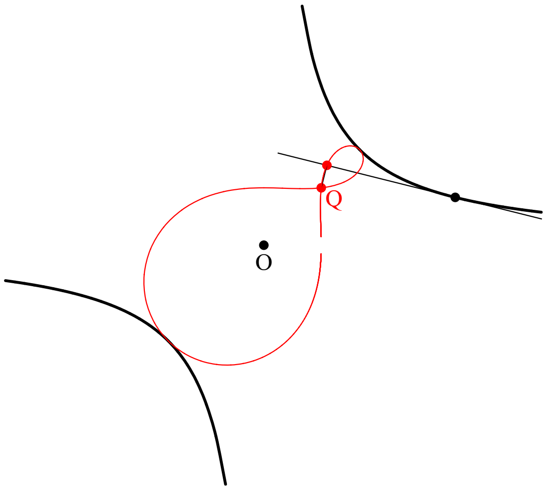
$$\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{t^4+1-t^2+t\cdot\sqrt{2}-1}{1+t^4}=1-\frac{t^2-t\cdot\sqrt{2}+1}{\left(t^2+t\cdot\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(t^2-t\cdot\sqrt{2}+1\right)}=\frac{t^2+t\cdot\sqrt{2}}{t^2+t\cdot\sqrt{2}+1}$$

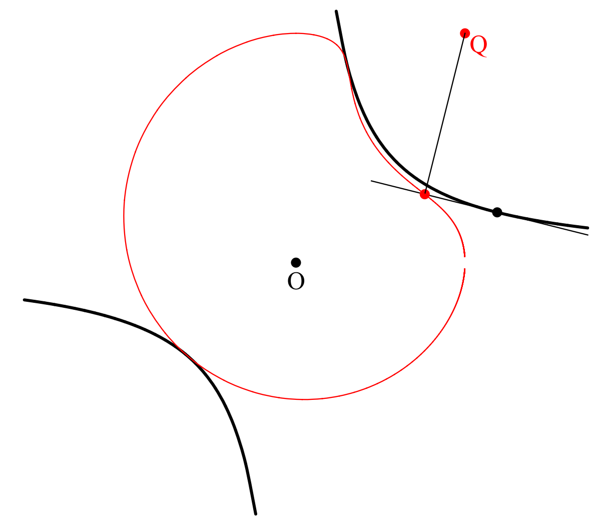
$$\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{t^3\cdot\sqrt{2}-t^2+1+t^4-t^4}{1+t^4}=1-t^2\,\frac{-t\cdot\sqrt{2}+1+t^2}{\left(t^2+t\cdot\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(t^2-t\cdot\sqrt{2}+1\right)}=\frac{t\cdot\sqrt{2}+1}{t^2+t\cdot\sqrt{2}+1}$$

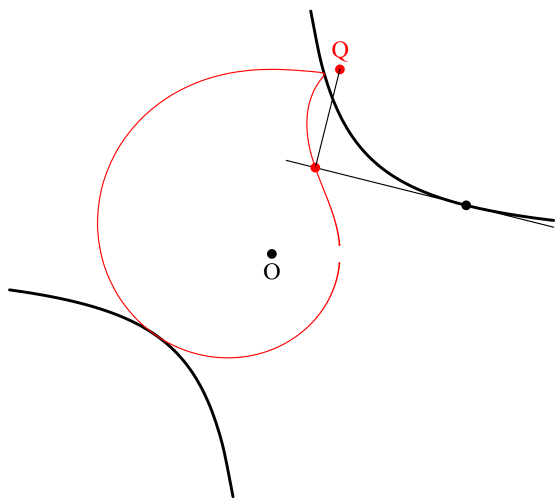
Nun ist $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=1$.

Ist Q anderswo, ergeben sich kompliziertere Kurven:









Die Evolute

Der Mittelpunkt $E(t)$ des Krümmungskreises zu $H(t)=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ liegt auf der Normalen zu $H(t)$, hat also die Form $M(t,\lambda)=H(t)+\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$. Der Kreis um $M(t,\lambda)$ durch $H(t)$ hat die Gleichung

$$\left(x-(t+\lambda)\right)^2+\left(y-\left(1/t+\lambda\cdot t^2\right)\right)^2=\lambda^2\cdot\left(1+t^4\right),$$

er schneidet die Hyperbel für $(x-t)^2\cdot\left(t^2\cdot x^2-2\cdot\lambda\cdot t^2\cdot x+1\right)=0$. Die Schnittstelle ist dreifach, falls die Klammer für $x=t$ verschwindet, also für $t^4-2\cdot\lambda\cdot t^3+1=0$, was auf $\lambda=\frac{t^4+1}{2\cdot t^3}$ und damit auf

$E(t)=M\left(t,\frac{t^4+1}{2\cdot t^3}\right)=\boxed{H(t)+\frac{t^4+1}{2\cdot t^3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}=E(t)}$ führt.

Insbesondere ist $E(1)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

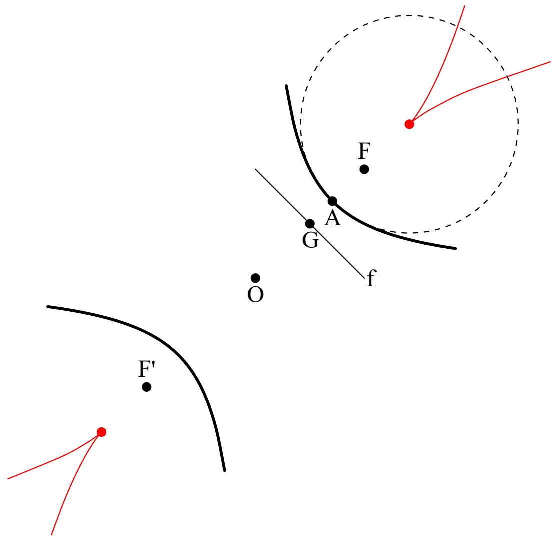
Zeichnet man noch die zu F gehörige Leitgerade f ein mit deren Schnittpunkt G mit der Achse F'F, so erkennt man wegen

$G=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F=\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E(1)=2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

die Progression

$$\boxed{\frac{|E(1)F|}{|FA|}=\frac{|FA|}{|AG|}=\sqrt{2}}.$$

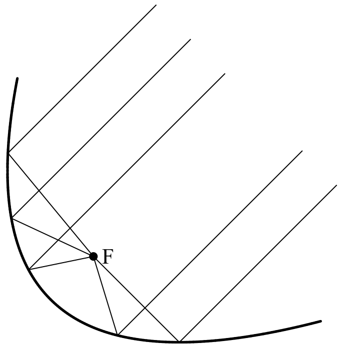
Die Gesamtheit aller Krümmungskreis-Mittelpunkte bildet die **Evolute**.



Wegen $E(t)=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}+\frac{t^4+1}{2\cdot t^3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ist

$$2\cdot x(t)=3\cdot t+\frac{1}{t^3},\quad 2\cdot y(t)=\frac{3}{t}+t^3=2\cdot x\left(\frac{1}{t}\right).$$

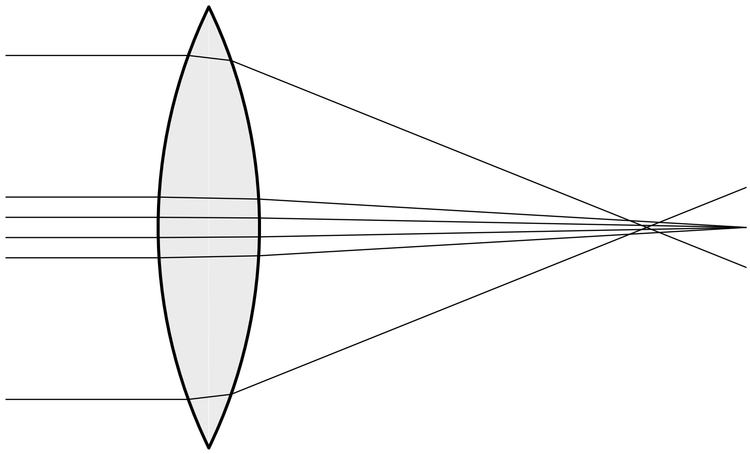
Plan-hyperbolische Linsen



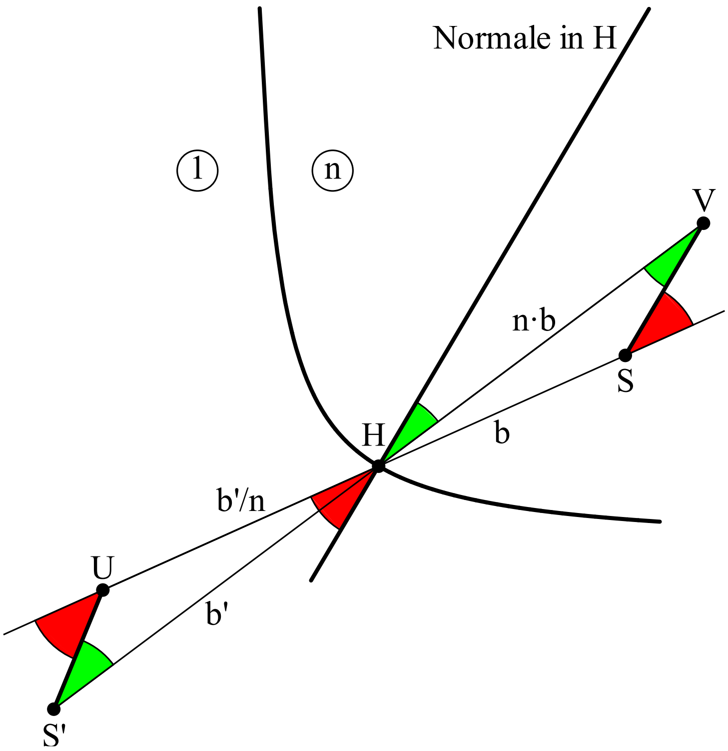
Bekanntlich werden alle achsenparallele Strahlen an einer Parabel-Innenwand so reflektiert, dass sie anschließend durch den Brennpunkt F gehen.

Man fragt sich, ob man diesen Effekt auch durch eine Linse erreichen kann.

Die gewöhnliche (aus zwei Kugelteilen bestehende) Sammellinse erfüllt diese Eigenschaft nur für achsennahe Strahlen, wie man schon im Physik-Unterricht gelernt hat.



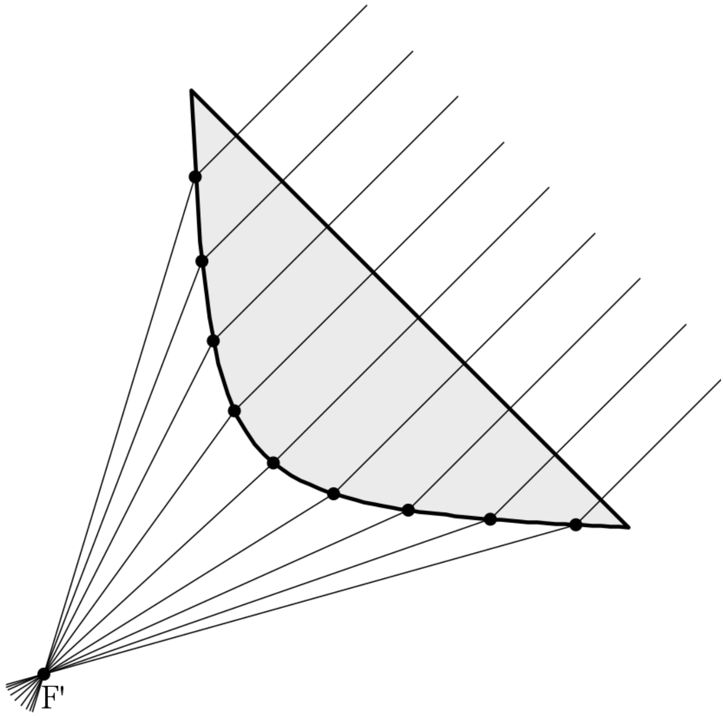
Wie konstruiert man gebrochene Strahlen? Die wohl einfachste Methode stammt von Ferdinand LIPPICH (1838 - 1913)[6]:
Links unterhalb der Kurve sei Luft mit dem Brechungsindex 1, rechts oberhalb der Kurve sei Glas (oder ein anderes Linsenmaterial) mit dem Brechungsindex $n(>1)$.
Von U kommt ein Lichtstrahl, der die Begrenzungskurve in H trifft mit dem roten Einfallswinkel. Die Normale in H ist fett gezeichnet. Der Brechungswinkel ist grün. Der Punkt S liegt irgendwo auf der Verlängerung von UH. SV ist zur Normalen in H parallel, und es gelte $\frac{HV}{HS}=n$. Wegen des Sinussatzes im Dreieck HSV gilt



$\frac{\sin(180°-rot)}{n\cdot b}=\frac{\sin(grün)}{b}$ bzw. $\sin(rot)=n\cdot\sin(grün)$, also das Brechungsgesetz. Damit liegt V auf dem gebrochenen Strahl.
Kommt umgekehrt der Lichtstrahl von V, so gilt mit derselben Konstruktion und Argumentation, dass U auf dem gebrochenen Strahl liegt.

[6] W. Hinrichs (1911): Einführung in die geometrische Optik. Leipzig: G.J.Göschen'sche Verlagshandlung.

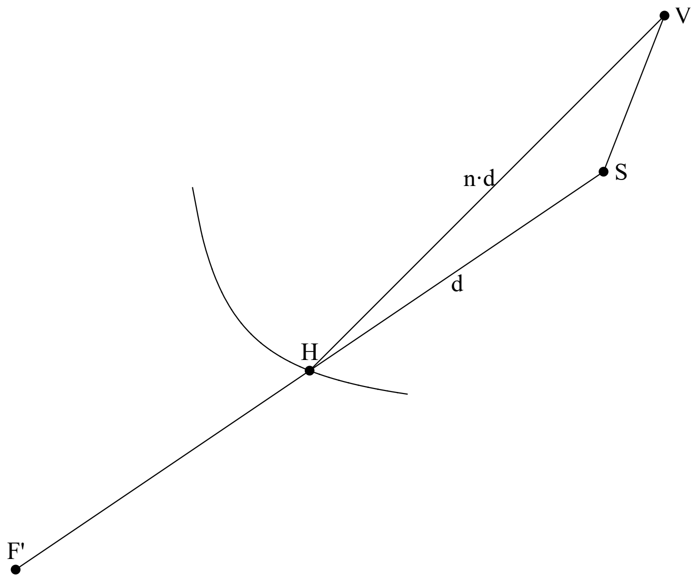
Nun treffen achsenparallele Strahlen von rechts auf den inneren Rand des rechten Hyperbelastes. Wenn das Linsenmaterial den Brechungsindex $\sqrt{2}$ hat, treffen die Lichtstrahlen sich nach der doppelten Brechung im Brennpunkt F‘. Die plan-hyperbolische Linse wirkt also als Sammellinse, und zwar nicht nur für achsennahe Strahlen.



Warum ist das so? Da der Lichtweg umkehrbar ist, beobachten wir einen von F‘ ausgehenden Strahl und gehen analytisch vor: Die Kurve hat den allgemeinen Punkt $H=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$.

Wir spiegeln $F'=\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ an H und bekommen $S=2\cdot H-F'$. Dann ist

$$d=|HS|=\left|\begin{pmatrix} t+\sqrt{2} \\ 1/t+\sqrt{2} \end{pmatrix}\right|=t+\sqrt{2}+\frac{1}{t}.$$



Wie konstruiert man V? Die Parallele durch H zur Hauptachse F’F hat den allgemeinen Punkt $X=H+\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und schneidet die durch S verlaufende Parallele zur Normalen zu H mit der Gleichung

$$X\cdot H'=S\cdot H'$$

für

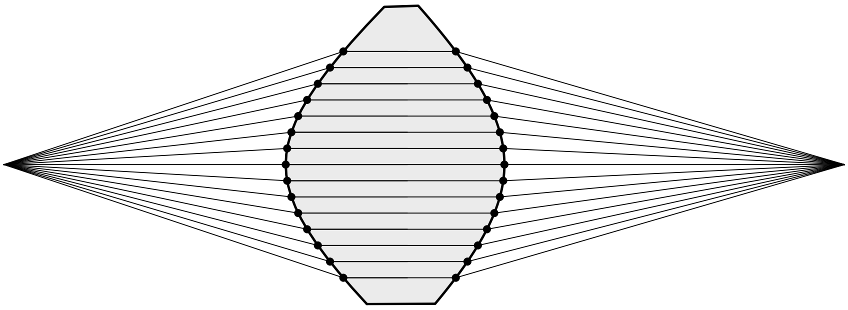
$$\left(\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} t^2 \\ -1 \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} 2\cdot t+\sqrt{2} \\ 2/t+\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} t^2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=t+\frac{1}{t}+\sqrt{2}$$

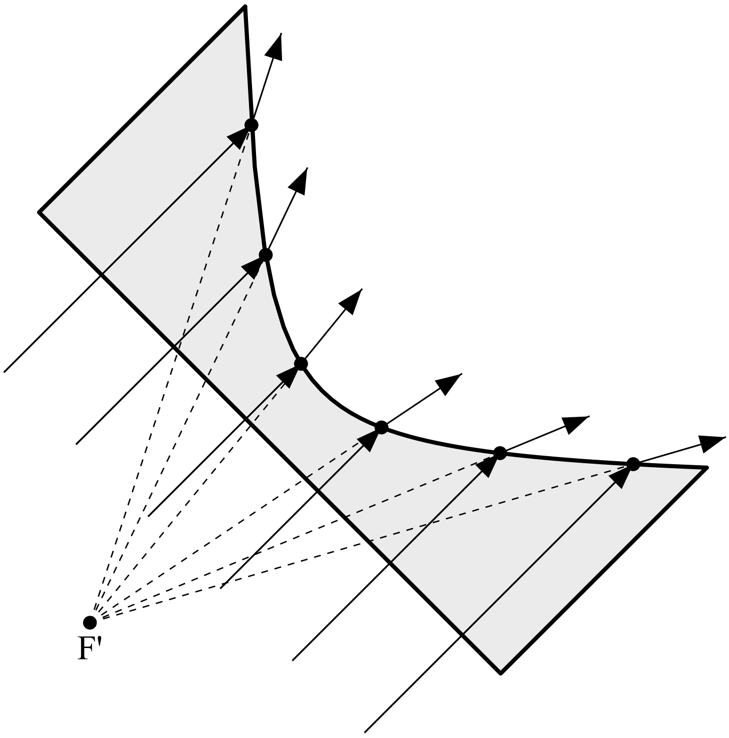
und damit in $V=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}+\left(t+\frac{1}{t}+\sqrt{2}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es folgt $|VH|=\left(t+\frac{1}{t}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}$, wie gewünscht.

Daher sind die gebrochen Strahlen tatsächlich alle parallel zur Hauptachse.

Kombiniert man zwei plankonvexe Hyperbellinsen, bekommt man eine **stigmatische** Abbildung, d.h.:
Alle von einem festen Punkt ausgehenden Strahlen treffen sich in einem anderen festen Punkt.



Eine plan-hyperbolische Konkavlinse wirkt als Zerstreuungslinse. Die rückwärtigen Verlängerungen der zweifach gebrochenen Strahlen treffen sich in F‘.



Schlussbemerkung

Die rechtwinklige Hyperbel tritt in unterschiedlichen Konstellationen auch als Hüllkurve von Geraden oder von Kreisen auf, was hier jedoch nicht dargestellt wird.