Dr. Jörg Meyer, Hameln
10. 8. 2020

Die beiden isodynamischen Punkte eines Dreiecks

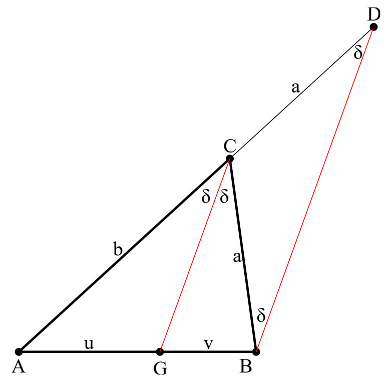
Eine Eigenschaft der Winkelhalbierenden

Rechts sieht man ein Dreieck ABC mit der Innen-Winkelhalbierenden CG durch C; es sei $\delta = \frac{\gamma}{2}$.

BD sei parallel zu CG. Dann tritt δ auch bei D und bei B auf. Daher ist $CD = a$.

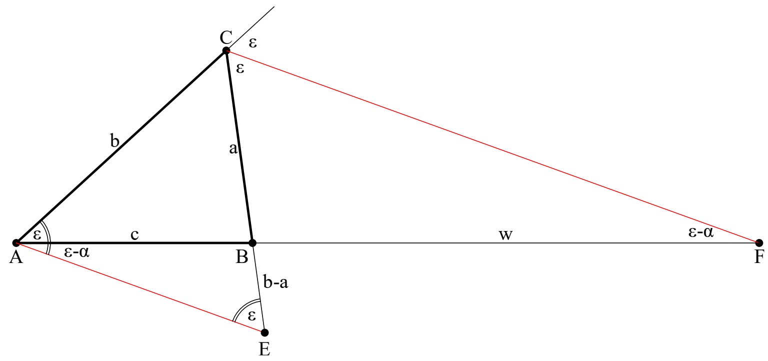
Aufgrund des Strahlensatzes ist $\frac{b}{a} = \frac{u}{v}$ bzw. $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{AG}{GB}}$.

Eine andere Begründung verwendet die Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und ABD.



Rechts sieht man ein Dreieck ABC mit der Außen-Winkelhalbierenden CF durch C. Es sei $a \neq b$, $\varepsilon = 90° - \frac{\gamma}{2}$ und AE parallel zu CF. Dann tritt ε an mehreren Stellen auf. Daher ist $CE = b$.

Nach dem Strahlensatz oder wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke AEB und BFC ist $\frac{b-a}{a} = \frac{c}{w}$ bzw. $\frac{b}{a} - 1 = \frac{c}{w}$ bzw. $\frac{b}{a} = \frac{c}{w} + 1$ bzw. $\frac{b}{a} = \frac{c+w}{w}$ bzw. $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{AF}{FB}}$.



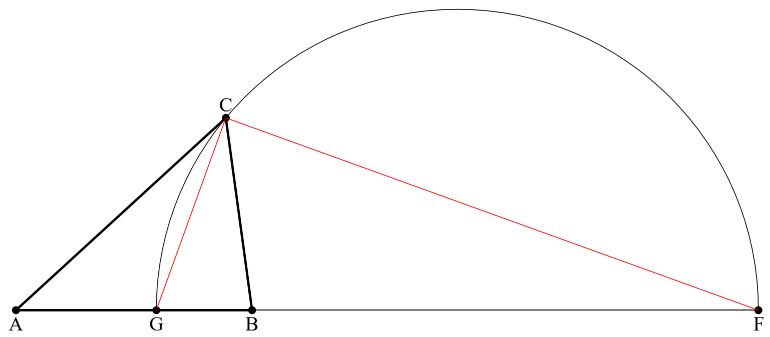
Sowohl die Innen- als auch die Außen-Winkelhalbierenden teilen somit die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, falls diese unterschiedliche Längen haben. Man beachte, dass nur das Abstands*verhältnis* eine Rolle spielt. Es wird also mehrere Punkte C geben mit

$$\frac{b}{a} = \frac{CA}{CB} = \frac{AG}{GB} = \frac{AF}{FB}.$$

Umkehrung

Nun gehen wir nicht von ABC aus, sondern suchen alle Punkte C, deren Abstandsverhältnis $\frac{CB}{CA} = \frac{a}{b}$ beträgt.

Hat man A, B, G und F, so ist die Antwort einfach: Da Außen- und Innen-Winkelhalbierende aufeinander senkrecht stehen, liegt C auf dem Thaleskreis über FG.

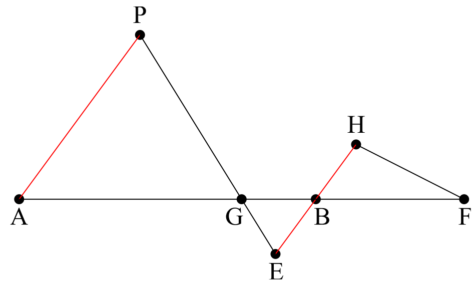


Dies führt zu zwei Fragen:

1. Wie konstruiert man F, wenn A, B und G gegeben sind?
2. Hat *jeder* Punkt C auf dem Thaleskreis die Eigenschaft $\frac{CB}{CA} = \frac{GB}{AG}$?

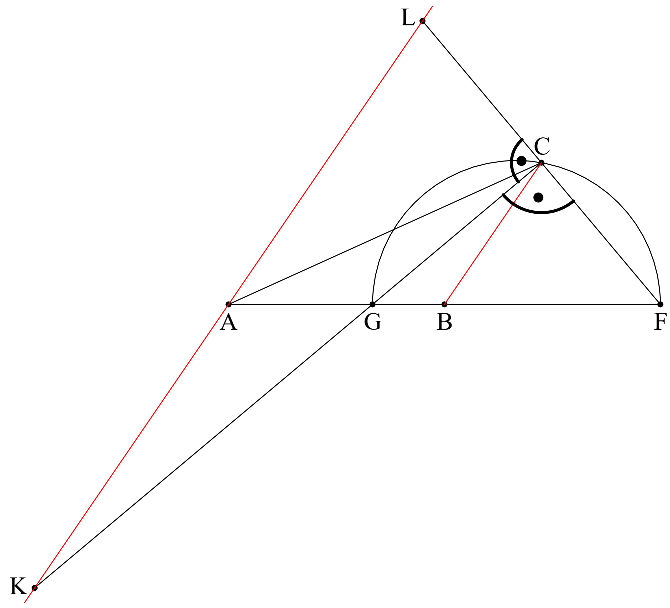
Ad 1: Gegeben sind A, B und F. P ist beliebig. Es wird eine Parallele zu AP durch B gezeichnet. PG schneidet diese Parallele in E. Spiegelt man E an B, bekommt man H. Die Gerade PH schneidet AB in F. Alle entstehenden Dreiecke sind zueinander ähnlich. Dann ist

$$\frac{AG}{GB}=\frac{AP}{EB}=\frac{AP}{BH}=\frac{AF}{BF}.$$



Ad 2: Es sei C auf dem Thaleskreis über GF, und es sei $\frac{AG}{GB}=\frac{AF}{FB}$.
Es wird eine Parallele[1] zu BC durch A gezeichnet; sie schneidet CF und CG in L bzw. K.
Dann ist $\frac{AG}{GB}=\frac{AK}{BC}$ und $\frac{AG}{GB}=\frac{AL}{BC}$, also ist A der Mittelpunkt von KL und damit auch Mittelpunkt des Thaleskreises über LK. Damit ist

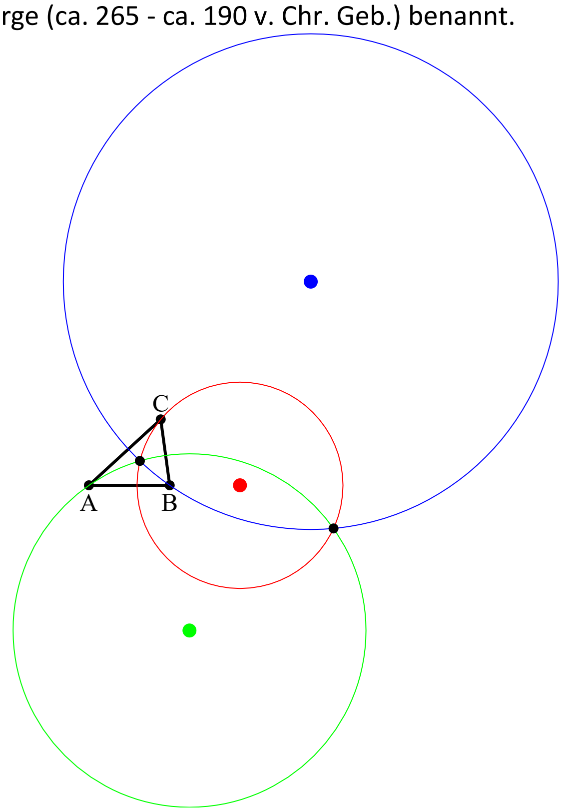
$$\frac{AG}{GB}=\frac{AK}{BC}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}.$$



Der Thaleskreis über GF wird nach Apollonius von Perge (ca. 265 - ca. 190 v. Chr. Geb.) benannt.

Die beiden isodynamischen Punkte

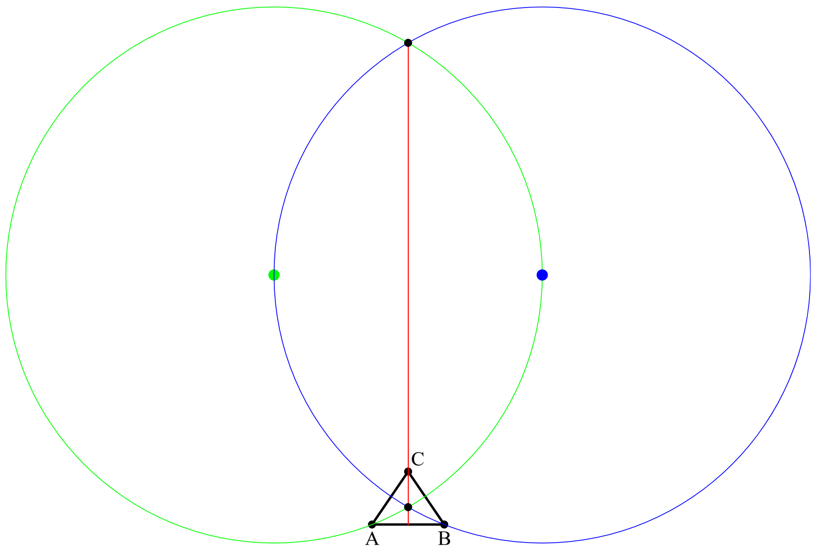
Der Apolloniuskreis zu AB hat die Eigenschaft, dass für jeden Punkt P auf ihm die Gleichung $a \cdot AP = b \cdot BP$ gilt. Ist $a = b$, entartet der Apolloniuskreis zur Mittelsenkrechten von AB.
Ist ein Dreieck nicht gleichschenklig, wird es auch einen Apolloniuskreis zu BC geben, dessen allgemeiner Punkt Q die Gleichung $b \cdot BQ = c \cdot CQ$ erfüllt, und einen Apolloniuskreis zu CA, dessen allgemeiner Punkt R die Gleichung $c \cdot CR = a \cdot AR$ erfüllt.
Wenn sich die Apolloniuskreise zu AB und BC in S und T schneiden, gilt $a \cdot AS = b \cdot BS = c \cdot CS$ und entsprechend für T, so dass auch der dritte Apolloniuskreis durch S und T geht.
Die Graphik zeigt den Apolloniuskreis zu AB (rot), zu BC (grün) und zu CA (blau) mit ihren Mittelpunkten
Diese beiden Schnittpunkte (Schwarz) sind die beiden *isodynamischen Punkte* des Dreiecks ABC.



Wenn die drei Kreise gemeinsame Schnittpunkte haben sollen, müssen die drei Kreismittelpunkte auf einer Geraden liegen; die beiden isodynamischen Punkte liegen symmetrisch zu dieser Geraden.

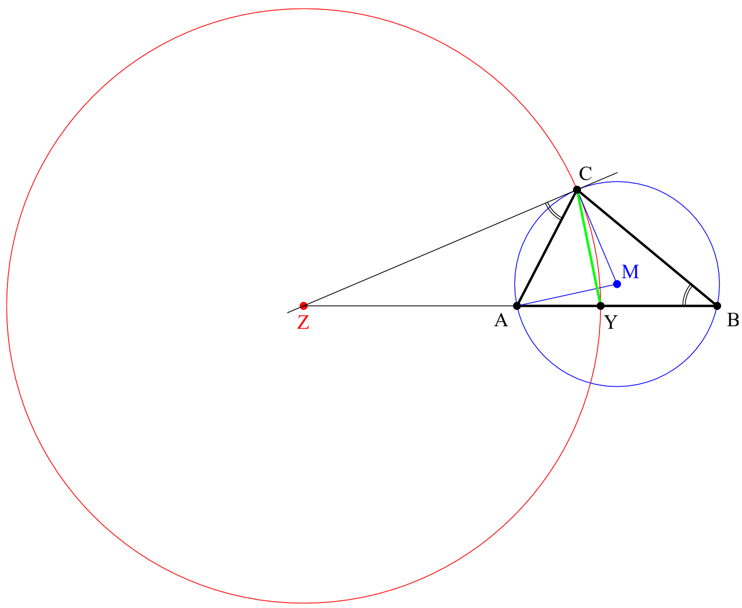
[1] Idee: Barth et al.: Anschauliche Geometrie 3. 1988 Ehrenwirth.

Rechts sieht man, was passiert, wenn das Dreieck ABC gleichschenklig ist (AC = AB).



Zusammenhang mit dem Umkreis

Trägt man auch den Umkreis zu ABC ein, so stellt man fest, dass die Tangente in C die Seite c im Mittelpunkt des C-Apolloniuskreises schneidet.
Anders ausgedrückt: Der Apolloniuskreis schneidet den Umkreis rechtwinklig.
Warum ist das so?
Die grüne Strecke YC halbiert (nach Konstruktion des Apolloniuskreises) den Winkel γ.
Im Dreieck AYC hat der Winkel bei Y die Größe $\beta+\frac{\gamma}{2}$. Aus Symmetriegründen hat dann auch der Winkel YCZ diese Größe.



Damit tritt der Winkel β auch bei C auf und ist dort doppelt markiert. Aufgrund des Umfangswinkelsatzes ist der Winkel AMC so groß wie $2\cdot\beta$, also ist der Winkel MCA so groß wie $90°-\beta$, so dass der Winkel MCZ insgesamt 90° beträgt.

Da die Mittelpunkte der Apolloniuskreise kollinear sind, gilt dies auch für die Schnittpunkte der Umkreistangenten mit den gegenüber liegenden Seiten.