Jörg MEYER, Hameln 15. 1. 2025 / 22. 4. 2025

Was sind hypergeometrische Reihen?

Inhalt

Worum geht es?

Eine Folge (g_k) heißt **geometrisch**, wenn $\frac{g_{k+1}}{g_k}$ für alle k stets denselben Wert hat.

Eine Folge (f_k) heißt **hypergeometrisch**, wenn $\frac{f_{k+1}}{f_k}=\frac{(k+a_1)\cdot\ldots\cdot(k+a_m)}{(k+b_1)\cdot\ldots\cdot(k+b_n)}\cdot\frac{x}{k+1}$ (der Faktor k+1 im Nenner muss[1] sein) für alle k stets dieselbe rationale Funktion (in k) ist. Dann bezeichnet man die Summe $\sum_{k\geq 0} f_k =: f_0\cdot F\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n\\ b_1,\ldots,b_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)$ als ***hypergeometrische Reihe*** für $f_0\neq 0$. In unserem Kontext seien die a_ν und b_μ reell.

Mit[2] $(a)_n := a\cdot(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)$ (n Faktoren aufwärts) ist

$$F\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n\\ b_1,\ldots,b_m\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{(a_1)_k\cdot\ldots\cdot(a_n)_k}{(b_1)_k\cdot\ldots\cdot(b_m)_k}\cdot\frac{x^k}{k!}.$$

Man kann „erweitern“ und „kürzen“.

Beispiele: Geometrische Reihe und binomische Formel

$\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geq 0} f_k=\sum_{k\geq 0} x^k$ mit $\frac{f_{k+1}}{f_k}=x=(k+1)\cdot\frac{x}{k+1}=\frac{(k+2)\cdot(k+1)}{k+2}\cdot\frac{x}{k+1}$ und $f_0=1$, also

$\sum_{k\geq 0} f_k = F\left(\begin{matrix}1\\ -\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=F\left(\begin{matrix}1,1\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\boxed{F\left(\begin{matrix}1,2\\ 2\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\frac{1}{1-x}}$ für $|x|<1$

[1] aus Gründen der Tradition. Würde man davon abweichen, müsste die gesamte Literatur über hypergeometrische Funktionen umgeschrieben werden.
[2] Dies POCHHAMMER-Symbol wird in der Literatur nicht einheitlich bezeichnet.

$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k\ge0} f_k = \sum_{k\ge0}\binom{n+k-1}{k}\cdot x^k$ mit $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{(n+k)!\cdot k!}{(k+1)!\cdot(n+k-1)!}\cdot x = \frac{k+n}{1}\cdot\frac{x}{k+1}$ und $f_0=1$, also

$\sum_{k\ge0} f_k = \boxed{F\left(\begin{matrix}n,1\\1\end{matrix}\middle| x\right) = \frac{1}{(1-x)^n}}$ für $x\neq 1$ sowie $\boxed{F\left(\begin{matrix}-n,1\\1\end{matrix}\middle| -x\right) = (1+x)^n}$ und $\boxed{F\left(\begin{matrix}-n,1\\1\end{matrix}\middle| -1\right) = 2^n}$.

$\sum_{k\ge0}\binom{n}{k} = \sum_{k\ge0} f_k$ mit $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k!\cdot(n-k)!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{k-n}{1}\cdot\frac{-1}{k+1}$ und $f_0=1$,

also $\boxed{F\left(\begin{matrix}-n\\-\end{matrix}\middle| -1\right) = F\left(\begin{matrix}-n,1\\1\end{matrix}\middle| -1\right) = \sum_{k\ge0}\binom{n}{k} = 2^n}$.

Dies liefert einen anderen Beweis[3] für

$$\sum_{k\ge0}\binom{n}{k} = 2^n. \tag{*}$$

Wegen $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k$ ist $n\cdot(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1}$ und damit $\sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot(1+1)^{n-1}$,

was man auch hypergeometrisch einsieht: Es ist $\sum_{j\ge0} j\cdot\binom{n}{j} = \sum_{j\ge1} j\cdot\binom{n}{j} = \sum_{k\ge0}\underbrace{(k+1)\cdot\binom{n}{k+1}}_{f_k}$ mit

$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{(k+2)\cdot(k+1)!\cdot(n-k-1)!}{(k+1)\cdot(k+2)!\cdot(n-k-2)!} = \frac{n-k-1}{1}\cdot\frac{1}{k+1} = \frac{k+1-n}{1}\cdot\frac{-1}{k+1}$ und $f_0=n$, also

$\sum_{k\ge0} f_k = n\cdot F\left(\begin{matrix}1-n\\-\end{matrix}\middle| -1\right) = n\cdot 2^{n-1}$ wegen $F\left(\begin{matrix}-n\\-\end{matrix}\middle| -1\right) = 2^n$.

Beispiele: exp, sin(h), cos(h)

$e^x = \sum_{k\ge0} f_k = \sum_{k\ge0}\frac{x^k}{k!}$ mit $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{x}{k+1} = \frac{k+1}{k+1}\cdot\frac{x}{k+1}$ und $f_0=1$, also $\boxed{F\left(\begin{matrix}-\\-\end{matrix}\middle| x\right) = F\left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\middle| x\right) = e^x}$

Auch die Reihen für die Kreis- und Hyperbel-Funktionen sind hypergeometrisch:

[3] Der gewöhnliche Beweis von (*) verwendet die binomische Formel für $(1+1)^n$ und die additive Rekursion $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, der hypergeometrische Beweis verwendet die multiplikative Beziehung $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

$\sin x = \sum\limits_{k\geq 0} f_k = \sum\limits_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{x^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}$ mit $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{-x^2}{(2\cdot k+2)\cdot(2\cdot k+3)} = \frac{1}{k+\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{-x^2}{4}$ und $f_0 = x$, also

$$\boxed{x\cdot F\left(\left.\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\right| -\frac{x^2}{4}\right) = \sin x}.$$

$\cos x = \sum\limits_{k\geq 0} f_k = \sum\limits_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{x^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$ mit $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{-x^2}{(2\cdot k+1)\cdot(2\cdot k+2)} = \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{-x^2}{4}$ und $f_0 = 1$, also

$$\boxed{F\left(\left.\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right| -\frac{x^2}{4}\right) = \cos x}.$$

$\sinh(x) = \sum\limits_{k\geq 0} f_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}$ mit $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{x^2}{(2\cdot k+2)\cdot(2\cdot k+3)} = \frac{1}{k+\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{x^2}{4}$ und $f_0 = x$, also

$$\boxed{x\cdot F\left(\left.\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\right| \frac{x^2}{4}\right) = \sinh(x)}.$$

$\cosh(x) = \sum\limits_{k\geq 0} f_k = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{x^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}$ mit $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{x^2}{(2\cdot k+1)\cdot(2\cdot k+2)} = \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{x^2}{4}$ und $f_0 = 1$, also

$$\boxed{F\left(\left.\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right| \frac{x^2}{4}\right) = \cosh(x)}.$$

Weitere (nicht vorgerechnete) Beispiele

Weitere Beispiele sind[4]

$$\boxed{\arcsin(x) = x\cdot F\left(\left.\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\right| x^2\right)} \text{ für } |x|\leq 1 \text{ und } \boxed{\int_0^x e^{-t^2}\cdot dt = x\cdot F\left(\left.\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix}\right| -x^2\right)} \text{ für } x>0.$$

VANDERMONDE und GAUß

Die VANDERMONDE-Relation lautet $\binom{r+s}{m+n} = \sum\limits_{k\geq 0} \binom{r}{m+k}\cdot\binom{s}{n-k} = \sum\limits_{k\geq 0} f_k$ mit

$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{(k+m-r)\cdot(k-n)\cdot(k+1)}{(k+m+1)\cdot(k+s-n+1)}\cdot\frac{1}{k+1}$ und $f_0 = \binom{r}{m}\cdot\binom{s}{n}$, also

[4] W. Koepf (2006): Computeralgebra. Springer, S. 352 ff.

$$\boxed{\binom{r}{m}\cdot\binom{s}{n}\cdot F\left(\begin{matrix}m-r,-n,1\\ m+1,\ s-n+1\end{matrix}\ \middle|1\right)=\binom{r+s}{m+n}}.$$

Für $s=n$ hat man $\boxed{\binom{r}{m}\cdot F\left(\begin{matrix}m-r,-n\\ m+1\end{matrix}\ \middle|1\right)=\binom{r+n}{m+n}}$, und für $m=0$ bekommt man $\boxed{\binom{s}{n}\cdot F\left(\begin{matrix}-r,-n\\ s-n+1\end{matrix}\ \middle|1\right)=\binom{r+s}{n}}$ und für $m=0$ und $r=n=s$ bekommt man $\boxed{F\left(\begin{matrix}-n,-n\\ 1\end{matrix}\ \middle|1\right)=\binom{2\cdot n}{n}}$.

Anderer Weg: Es ist $\binom{2\cdot m}{m}=\sum\limits_{k\geq 0}\binom{m}{k}^2=\sum\limits_{k\geq 0}g_k$ mit $\frac{g_{k+1}}{g_k}=\frac{(k-m)\cdot(k-m)}{(k+1)}\cdot\frac{1}{k+1}$ und $g_0=1$, also ist $\sum\limits_{k\geq 0}g_k=\boxed{F\left(\begin{matrix}-m,-m\\ 1\end{matrix}\ \middle|1\right)=\binom{2\cdot m}{m}}$. (Es gibt den anderen Weg, weil $\binom{2\cdot m}{m}=\sum\limits_{k\geq 0}\binom{m}{k}^2$ aus der VANDERMONDE-Relation folgt.)

Auf nicht ganz trivialem Weg folgt[5] aus der VANDERMONDE-Relation die von GAUß stammende und auch für negative Argumente gültige Formel

$$\boxed{F\left(\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix}\ \middle|1\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)}\cdot\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)}},$$

falls $b\leq 0$ ganzzahlig oder $c>a+b$ ist.

Mit $b=-m\in\mathbb{Z}$ bekommt man $F\left(\begin{matrix}a,-m\\ c\end{matrix}\ \middle|1\right)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)}\cdot\frac{\Gamma(c-a+m)}{\Gamma(c-a)}=\boxed{\frac{(c-a)_m}{(c)_m}=F\left(\begin{matrix}a,-m\\ c\end{matrix}\ \middle|1\right)}$ wegen $\frac{\Gamma(u+m)}{\Gamma(u)}=\frac{(1)_{u-1+m}}{(1)_{u-1}}=(u)_m$.

Für $m>0, n>0$ ist $F\left(\begin{matrix}-m,-n\\ 1\end{matrix}\ \middle|1\right)=\frac{\Gamma(1)\cdot\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\cdot\Gamma(n+1)}=\frac{(m+n)!}{m!\cdot n!}$, also $\boxed{F\left(\begin{matrix}-m,-n\\ 1\end{matrix}\ \middle|1\right)=\binom{m+n}{m}}$ und insbesondere $F\left(\begin{matrix}-m,-m\\ 1\end{matrix}\ \middle|1\right)=\binom{2\cdot m}{m}$ für $m>0$, womit diese Beziehung ein drittes Mal bestätigt ist.

Erste Anwendungen

Welchen Vorteil bietet die Verwendung hypergeometrischer Funktionen? Bisher hatte man ja nur Beziehungen, die man auch auf anderem Wege hätte gewinnen können.

[5] L.J.Slater (1966): Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge University Press, § 1.7.
Siehe auch J. Choi (1998): A Note on Vandermonde‘s Convolution Theorem. In: Asian Math J **14** (1), pp 157-163.

Gesucht ist ein geschlossener Ausdruck für $\sum\limits_{k\geq 0}\binom{k+p}{k}\cdot x^{m\cdot k}=\sum\limits_{k\geq 0} f_k$. Die Quotienten $\frac{f_{k+1}}{f_k}=(k+1+p)\cdot\frac{x^m}{k+1}$ mit $f_0=1$ führen auf $F\left(\begin{matrix}1+p\\ -\end{matrix}\,\middle|\,x^m\right)$, und wegen $F\left(\begin{matrix}n\\ -\end{matrix}\,\middle|\,x\right)=\frac{1}{(1-x)^n}$ ist $\sum\limits_{k\geq 0} f_k=\frac{1}{\left(1-x^m\right)^{p+1}}$ für $|x|<1$.

Es geht nicht immer so einfach: Gesucht ist ein geschlossener Ausdruck für $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\cdot\binom{n}{k}=\sum\limits_{k\geq 1} k^2\cdot\binom{n}{k}=\sum\limits_{k\geq 1} f_k$. Mit $g_k=f_{k+1}$ liefern die Quotienten $\frac{g_{k+1}}{g_k}=\frac{f_{k+2}}{f_{k+1}}=\frac{(k+2)\cdot(k+1-n)}{k+1}\cdot\frac{-1}{k+1}$ mit $g_0=f_1=n$ die Beziehung $\sum\limits_{k\geq 1} f_k=n\cdot F\left(\begin{matrix}2,\,1-n\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)$. Nun war $F\left(\begin{matrix}1,\,-m\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)=2^m$. Hier benötigt man eine Formel für Argumenttransformationen.

Natürlich kommt man auch anders zum Ziel: Wegen

$$(1+x)^n=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot x^k$$
$$n\cdot(1+x)^{n-1}=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1}$$
$$n\cdot(n-1)\cdot(1+x)^{n-2}=\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot k\cdot(k-1)\cdot x^{k-2}$$

ist

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot k=n\cdot 2^{n-1}$$
$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot\left(k^2-k\right)=n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$$
$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\cdot k^2=n\cdot(n+1)\cdot 2^{n-2}$$

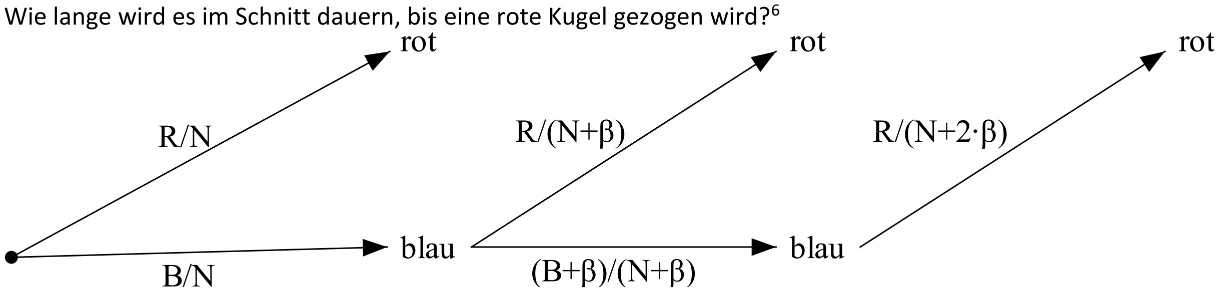
und daher

$$F\left(\begin{matrix}2,\,1-n\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)=(n+1)\cdot 2^{n-2}\text{ bzw. }\boxed{F\left(\begin{matrix}2,\,-m\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)=(m+2)\cdot 2^{m-1}}\text{ bzw.}$$

$$\boxed{F\left(\begin{matrix}2,\,-m\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)=(m+2)\cdot F\left(\begin{matrix}1,\,-m+1\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,-1\right)}.$$

Anwendung auf Pólya-Urnen

Wir haben eine Urne mit R roten und B blauen Kugeln, zusammen also $N=R+B$ Kugeln, und ziehen mit Zurücklegen.
Ist die gezogene Kugel rot, ist die Zieherei zu Ende und wird sonst wiederholt.
Ist die gezogene Kugel blau, wird sie zurückgelegt und zusätzlich β blaue Kugeln dazu in die Urne getan.
Wird man irgendwann eine rote Kugel ziehen? Die Wahrscheinlichkeit dafür wird ja bei jeder Ziehung kleiner.
Wie lange wird es im Schnitt dauern, bis eine rote Kugel gezogen wird?[6]



k	Man hat „rot" bei der k-ten Ziehung mit Wahrscheinlichkeit
1	$p_1=\frac{R}{N}$
2	$p_2=p_1\cdot\frac{B}{N+\beta}$
3	$p_3=p_2\cdot\frac{B+\beta}{N+2\cdot\beta}$

Man sieht für $k\geq 3$ die Rekursion $\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{B+(k-1)\cdot\beta}{N+k\cdot\beta}=\frac{k+\frac{B}{\beta}-1}{k+\frac{N}{\beta}}$, die eine hypergeometrische Folge in k vom Typ „linear durch linear" beschreibt.

Die entsprechende allgemeine hypergeometrische Reihe sollte den Startindex 0 haben, also sei $f_k:=p_{k+1}$ für $k\geq 0$. Dann ist $\frac{f_{k+1}}{f_k}=\frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}=\frac{k+\frac{B}{\beta}}{k+1+\frac{N}{\beta}}\cdot\frac{k+1}{k+1}$ und $\sum_{k\geq 0} f_k=f_0\cdot F\left(\begin{matrix}\frac{B}{\beta},1\\ \frac{N}{\beta}+1\end{matrix}\,\middle|\,1\right)$ mit $f_0=P_1=\frac{R}{N}$.

Nun gilt

$$F\left(\begin{matrix}U,1\\ V\end{matrix}\,\middle|\,1\right)=\frac{\Gamma(V)\cdot\Gamma(V-U-1)}{\Gamma(V-U)\cdot\Gamma(V-1)}=\frac{\Gamma\left(\frac{N}{\beta}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{R}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{\beta}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{N}{\beta}\right)}=\frac{\frac{N}{\beta}}{\frac{R}{\beta}}=\frac{N}{R}$$

für $V>U+1$, also $\frac{N}{\beta}+1>\frac{B}{\beta}+1$, was erfüllt ist, da mindestens eine rote Kugel vorhanden sein sollte.
Damit ist $\sum_{k\geq 1} p_k=\sum_{k\geq 0} f_k=1$, unabhängig von b, r, β. Also kommt irgendwann die rote Kugel.

Der **Erwartungswert** für den Zeitpunkt des Eintreffens ist $E=\sum_{k\geq 0}\underbrace{(k+1)\cdot p_{k+1}}_{=:q_k}$ mit dem Quotienten

[6] Ein anderer Weg (ohne hypergeometrische Reihen) zur Beantwortung dieser Fragen wird dargestellt in Henze/Vehling: Überraschungen mit Wartezeitverteilungen im Pólyaschen Urnenmodell. In: Stochastik in der Schule **41**(3), 2021, S. 2-8.

$$\frac{q_{k+1}}{q_k}=\frac{(k+2)\cdot p_{k+2}}{(k+1)\cdot p_{k+1}}=\frac{(k+2)\cdot\left(k+\frac{B}{\beta}-1\right)}{k+\frac{N}{\beta}}\cdot\frac{1}{k+1}.$$

Daher hat man es mit $F\left(\begin{matrix}2,\ \frac{B}{\beta}-1\\ \frac{N}{\beta}\end{matrix}\middle|1\right)$ zu tun. Für $R>\beta$ gilt dann

$$F\left(\begin{matrix}2,\ \frac{B}{\beta}-1\\ \frac{N}{\beta}\end{matrix}\middle|1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{N}{\beta}-\frac{B}{\beta}+1-2\right)\cdot\Gamma\left(\frac{N}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{N}{\beta}-\frac{B}{\beta}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{N}{\beta}-1\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{R}{\beta}-1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{N}{\beta}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{R}{\beta}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{N}{\beta}-1\right)}=\frac{\frac{N}{\beta}\cdot\left(\frac{N}{\beta}-1\right)}{\frac{R}{\beta}\cdot\left(\frac{R}{\beta}-1\right)}=\frac{N\cdot(N-\beta)}{R\cdot(R-\beta)}$$

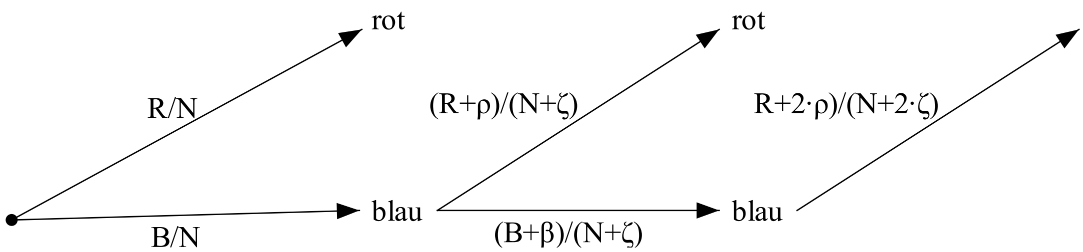
und deshalb $E=q_0\cdot F\left(\begin{matrix}2,\ \frac{B}{\beta}-1\\ \frac{N}{\beta}\end{matrix}\middle|1\right)=p_1\cdot F\left(\begin{matrix}2,\ \frac{B}{\beta}-1\\ \frac{N}{\beta}\end{matrix}\middle|1\right)=\frac{R}{N}\cdot\frac{N\cdot(N-\beta)}{R\cdot(R-\beta)}=\frac{N-\beta}{R-\beta}$.

Für $R=2,\ \beta=1$ bekommt man $E=B+1$. Für $R=\beta$ divergiert die Summe.

Die Grenze der Methode

Allerdings hat die Verwendung hypergeometrischer Reihen bei der Pólya-Urne auch ihre Grenzen:

Werden nach Ziehung einer blauen Kugel nicht nur β blaue Kugeln, sondern auch zusätzlich ρ rote Kugeln hinzugetan, ist natürlich die Wahrscheinlichkeit, irgendwann eine rote Kugel ziehen erst recht so groß wie 1, aber die Wartezeit wird kürzer sein. Insgesamt legt man nach dem Ziehen einer blauen Kugel $\zeta=\beta+\rho$ weitere Kugeln in die Urne. Geht man genauso vor wie im Fall $\rho=0$, ergibt sich:



k	Man hat „rot“ bei der k-ten Ziehung mit Wahrscheinlichkeit
1	$p_1=\frac{R}{N}$
2	$p_2=p_1\cdot\frac{B}{R}\cdot\frac{R+\rho}{N+\zeta}$
3	$p_3=p_2\cdot\frac{B+\beta}{R+\rho}\cdot\frac{R+2\cdot\rho}{N+2\cdot\zeta}$

Man sieht für $k\geq 3$ die Rekursion $\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{B+(k-1)\cdot\beta}{R+(k-1)\cdot\rho}\cdot\frac{R+k\cdot\rho}{N+k\cdot\zeta}=\frac{\beta}{\zeta}\cdot\frac{k+\frac{B}{\beta}-1}{k+\frac{R}{\rho}-1}\cdot\frac{k+\frac{R}{\rho}}{k+\frac{N}{\zeta}}$, die wieder eine hypergeometrische Folge in k beschreibt.

Die entsprechende allgemeine hypergeometrische Reihe sollte den Startindex 0 haben, also sei $f_k := p_{k+1}$ für $k \ge 0$. Dann ist $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{p_{k+2}}{p_{k+1}} = \frac{\beta}{\zeta} \cdot \frac{k+\frac{B}{\beta}}{k+1+\frac{N}{\zeta}} \cdot \frac{k+1+\frac{R}{\rho}}{k+\frac{R}{\rho}} \cdot \frac{k+1}{k+1}$ und $\sum_{k\ge 0} f_k = \frac{R}{N} \cdot F\begin{pmatrix} \frac{B}{\beta}, \frac{R}{\rho}+1, 1 & \left|\frac{\beta}{\zeta}\right. \\ \frac{N}{\zeta}+1, \frac{R}{\rho} & \end{pmatrix}$.

Für $\rho = 0$, also $\zeta = \beta$, bekommt man $\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{k+\frac{B}{\beta}}{k+1+\frac{N}{\beta}} \cdot \frac{k+1}{k+1}$ und $\sum_{k\ge 0} f_k = \frac{R}{N} \cdot F\begin{pmatrix} \frac{B}{\beta}, 1 & \left|1\right. \\ \frac{N}{\beta}+1 & \end{pmatrix}$.

Der **Erwartungswert** für den Zeitpunkt des Eintreffens von „rot" ist $E = \sum_{k\ge 0} \underbrace{(k+1)\cdot p_{k+1}}_{=:q_k}$ mit dem Quotienten

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{k+2}{k+1} \cdot \frac{\beta}{\zeta} \cdot \frac{k+\frac{B}{\beta}}{k+1+\frac{N}{\zeta}} \cdot \frac{k+1+\frac{R}{\rho}}{k+\frac{R}{\rho}} = \frac{k+\frac{B}{\beta}}{k+1+\frac{N}{\zeta}} \cdot \frac{k+1+\frac{R}{\rho}}{k+\frac{R}{\rho}} \cdot (k+2) \cdot \frac{\frac{\beta}{\zeta}}{k+1},$$

was zu $\sum_{k\ge 0} q_k = \frac{R}{N} \cdot F\begin{pmatrix} 2, \frac{B}{\beta}, \frac{R}{\rho}+1 & \left|\frac{\beta}{\zeta}\right. \\ \frac{N}{\zeta}+1, \frac{R}{\rho} & \end{pmatrix}$ führt.

Leider sind die CLAUSEN-Reihen $F\begin{pmatrix} a,b,c & \left|z\right. \\ d,e & \end{pmatrix}$ komplizierter als die GAUß-Reihen $F\begin{pmatrix} a,b & \left|1\right. \\ c & \end{pmatrix}$, deren Werte in jedem einschlägigen Buch stehen.