Dr. Jörg Meyer, Hameln

16. 5. 2020

# Die schulische Analysis wäre viel einfacher, wenn

man die Summe der endlichen geometrischen Reihe kennen würde, nämlich

$$\boxed{1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}}\,.$$

In der Differentialrechnung benötigt man nicht die (den Schülerinnen und Schülern unbekannte) binomische Formel für $(a+h)^n$, und in der Integralrechnung benötigt man nicht die (den Schülerinnen und Schülern unbekannten) Formeln für Potenzsummen. Auch das Integral $\int \frac{dx}{x}$ ist kein Ausnahmeintegral mehr.

## A. Wie kommt man auf die Summenformel?

Es ist

$$1+q=\frac{1-q^2}{1-q}$$

$$1+q+q^2=1+q\cdot\frac{1-q^2}{1-q}=\frac{1-q^3}{1-q}$$

$$1+q+q^2+q^3=1+q+q^2\cdot\frac{1-q^2}{1-q}=\frac{1-q^4}{1-q}$$

Das Muster ist offensichtlich.

## B. Zur Ableitung

Zur Ableitung von $f(x)=x^n$ an der Stelle a für natürliche Exponenten n: Der Differenzenquotient ist

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=a^{n-1}\cdot\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n-1}{\frac{x}{a}-1}=a^{n-1}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}\right)}_{n\ \text{Summanden}}\xrightarrow{x\to a}a^{n-1}\cdot n\,.$$

Exemplarisch werden die unnatürlichen Exponenten -1 und 1/2 behandelt:

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\frac{1}{x\cdot a}\cdot(-1)\xrightarrow{x\to a}\frac{-1}{a^2};\quad \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\xrightarrow{x\to a}\frac{1}{2\cdot\sqrt{a}}$$

## C. Zum Integral

Die einzige Voraussetzung für das Folgende ist, dass das Integrationsintervall [a; b] nicht die Null enthalten darf.

Das Intervall wird nicht äquidistant, sondern geometrisch aufgeteilt in k Teilintervalle als

$$[a;\,b]=[a;\,a\cdot q]\cup[a\cdot q;\,a\cdot q^2]\cup[a\cdot q^2;\,a\cdot q^3]\cup\ldots\cup[a\cdot q^{k-1};\,\underbrace{a\cdot q^k}_{=b}]\ \text{mit}\ q=\sqrt[k]{\frac{b}{a}}\xrightarrow{k\to\infty}1\,.$$

Die zu $f(x)=x^2$ gehörige Produktsumme ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1}\left(a\cdot q^i\right)^2\cdot\left(a\cdot q^{i+1}-a\cdot q^i\right)&=a^3\cdot(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\left(q^3\right)^i\\&=a^3\cdot(q-1)\cdot\frac{q^{3\cdot k}-1}{q^3-1}\\&=a^3\cdot(q-1)\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^3-1}{q^3-1}\\&=\left(b^3-a^3\right)\cdot\frac{1}{1+q+q^2}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{b^3-a^3}{3}\end{aligned}$$

(Man beachte, dass $q=\sqrt[k]{\frac{b}{a}}\xrightarrow{k\to\infty}1$ gilt.) Das funktioniert für alle natürlichen Exponenten, aber auch die unnatürlichen Exponenten -2 und 1/2 lassen sich nach diesem Muster behandeln (und natürlich alle anderen rationalen Exponenten außer -1 auch):

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1}\left(a\cdot q^i\right)^{-2}\cdot\left(a\cdot q^{i+1}-a\cdot q^i\right)&=a^{-1}\cdot(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{k-1}\left(q^{-1}\right)^i\\&=a^{-1}\cdot q\cdot(1-q^{-1})\cdot\frac{q^{-k}-1}{q^{-1}-1}\\&=-a^{-1}\cdot q\cdot\left(\left(\frac{a}{b}\right)-1\right)\\&=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot q\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\left(=\int_a^b\frac{dx}{x^2}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1}\sqrt{a\cdot q^i}\cdot\left(a\cdot q^{i+1}-a\cdot q^i\right)&=a^{3/2}\cdot(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{k-1}q^{1,5\cdot i}\\&=a^{3/2}\cdot\left(q-1\right)\cdot\frac{q^{1,5\cdot k}-1}{q^{1,5}-1}\\&=a^{1,5}\cdot\left(q-1\right)\cdot\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1,5}-1}{q^{1,5}-1}\\&=\left(b^{1,5}-a^{1,5}\right)\cdot\frac{\left(\frac{q-1}{\sqrt{q}-1}\right)}{\left(\frac{q^{1,5}-1}{\sqrt{q}-1}\right)}\\&=\left(b^{1,5}-a^{1,5}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}+q}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\left(b^{1,5}-a^{1,5}\right)\left(=\int_a^b\sqrt{x}\cdot dx\right)\end{aligned}$$

Auch für den Exponenten -1 hat man in weitgehender Analogie zum Bisherigen

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{a \cdot q^{i}} \cdot \left(a \cdot q^{i+1} - a \cdot q^{i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} (q-1) = k \cdot (q-1) = k\left(\sqrt[k]{\frac{b}{a}} - 1\right) =: A \ .$$

Mit $h := \frac{1}{k}$ ist $A = \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^{h} - 1}{h} \xrightarrow{h \to 0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln b - \ln a$.

(Der letzte Limes ist von der Ableitung der Expoentialfunktion her bekannt: Weiß man, dass $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$ ist, so ist einerseits $\left(c^{x}\right)' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c^{x+h} - c^{x}}{h} = c^{x} \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c^{h} - 1}{h}$ und andererseits $\left(c^{x}\right)' = \left(e^{x \cdot \ln c}\right)' = \ln c \cdot e^{x \cdot \ln c} = \ln c \cdot c^{x}$, also ist $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c^{h} - 1}{h} = \ln c$.)