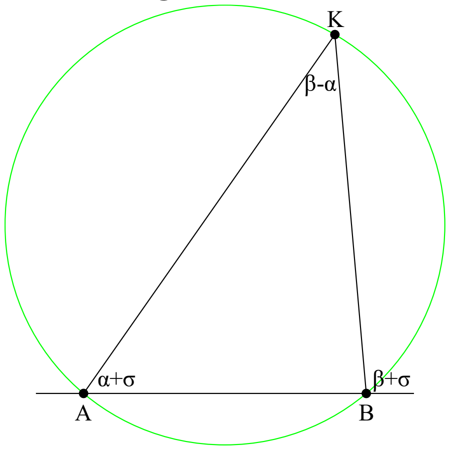
Jörg MEYER, Hameln 28.1.2021/117.4.2025

Zwei Leuchttürme

Gleichsinniges Drehen führt zu einem Kreis



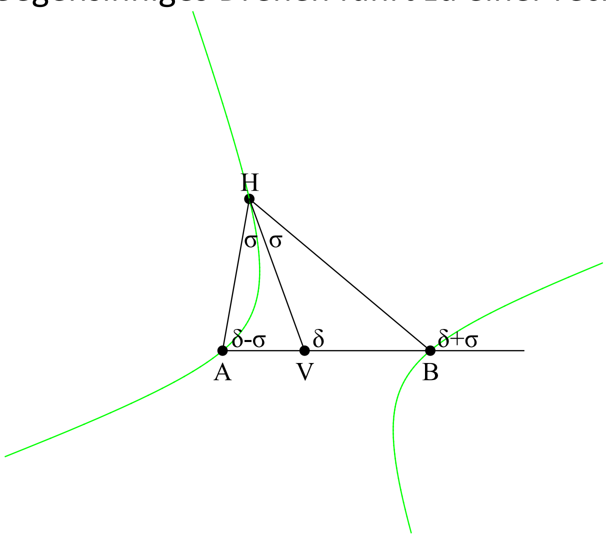
Zwei Leuchttürme A und M senden Strahlen aus, die sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit gleichsinnig drehen. Nimmt der Winkel bei A um σ zu, so tut das auch der Winkel bei B.

Der Differenzwinkel $\beta-\alpha$ bleibt konstant.

Zu einem gewissen Zeitpunkt treffen sich beide Strahlen in K.

Nach dem Umfangswinkelsatz liegen alle Schnittpunkte K auf einem Kreis durch A und B, dessen Größe durch $\beta-\alpha$ bestimmt ist.

Gegensinniges Drehen führt zu einer rechtwinkligen Hyperbel



Nun drehen sich beide Strahlen gegensinnig, aber mit der gleichen absoluten Winkelgeschwindigkeit. Nimmt der Winkel bei A um σ ab, so nimmt der Winkel bei B um σ zu. Der Winkel σ ändert sich ständig.

In der Figur ist HV die Winkelhalbierende. Es fällt auf, dass der Winkel bei V von σ unabhängig ist.

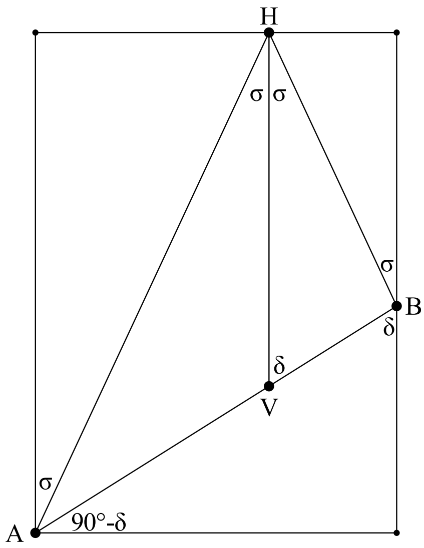
Der Winkel δ ist fest (aber σ ändert sich).

Zu einem gewissen Zeitpunkt treffen sich beide Strahlen in H.

Zur weiteren Untersuchung ist es hilfreich, die Anordnung so zu drehen, dass VH vertikal verläuft.

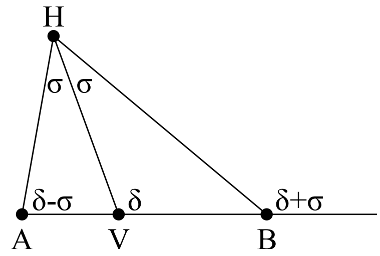
Gegeben sind zwei Punkte A und B und damit δ als Komplementärwinkel von AB zur Horizontalen. H, V und σ ändern sich.

Setzt man $A=\begin{pmatrix}-1\\-m\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ mit $m=\cot\delta$ und $H=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, so ist im Dreieck AVH: $\tan\sigma=\dfrac{x+1}{y+m}$ und im Dreieck VBH: $\tan\sigma=\dfrac{1-x}{y-m}$, was auf $\boxed{x\cdot y=m}$ führt. H liegt daher auf einer *rechtwinkligen Hyperbel*, die auch durch A und durch B geht.

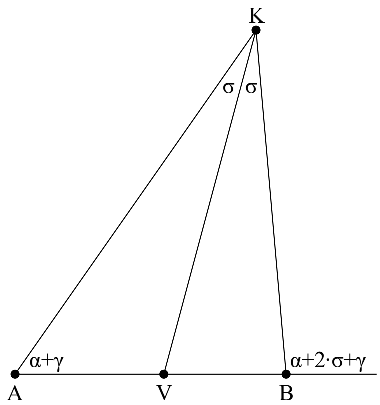


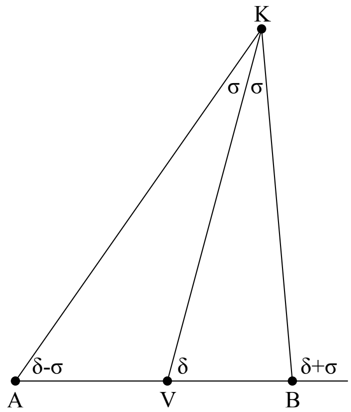
Synopse

Hyperbelfall:
Für $\sigma = 0$ können die Winkel bei A und bei B von gleicher Größe δ sein.
Es ist δ konstant, und σ ändert sich.



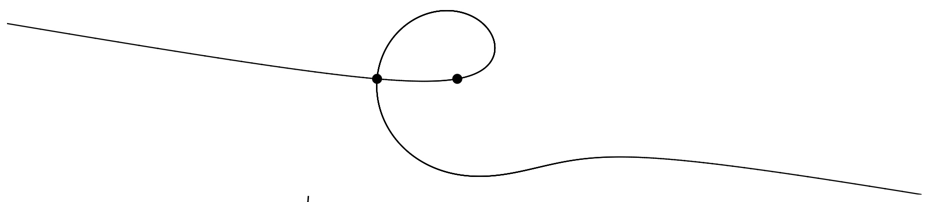
Kreisfall:
Die Differenz $\beta - \alpha =: 2 \cdot \sigma$ ist konstant.
Nennt man $\alpha + \sigma + \gamma =: \delta$, hat man die Bezeichnungen ganz rechts.
Es ist σ konstant, und δ ändert sich.

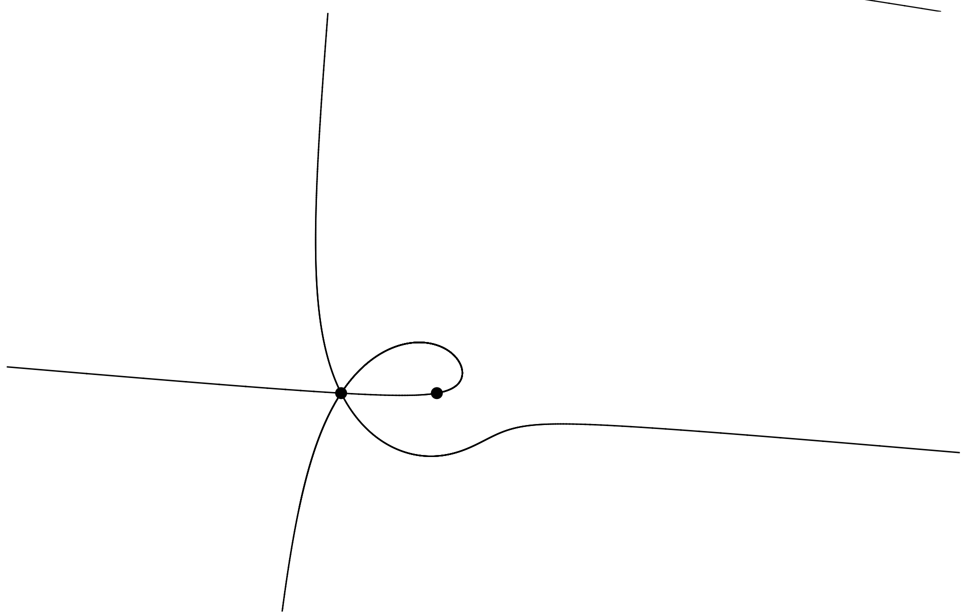


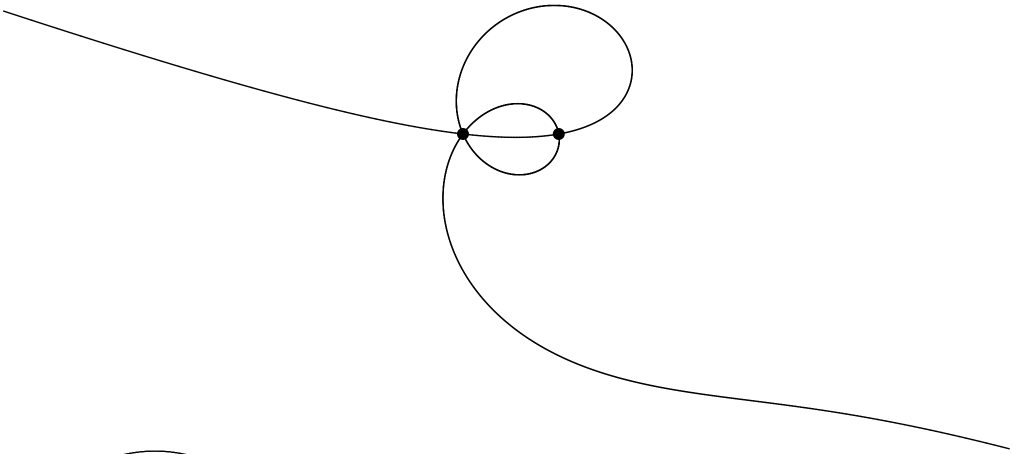


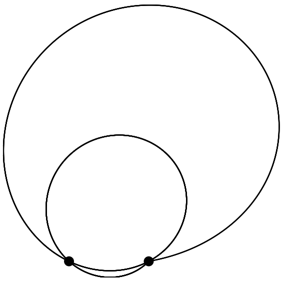
Man braucht hier nicht aufzuhören

Die Kurven werden komplizierter und sind auch keine Kegelschnitte mehr, wenn die absoluten Winkelgeschwindigkeiten nicht mehr gleich sind. Die folgenden Bilder zeigen Teile der Kurven, wenn sich die gleichsinnigen Winkelgeschwindigkeiten verhalten wie 1:2, 1:3 und 2:3.

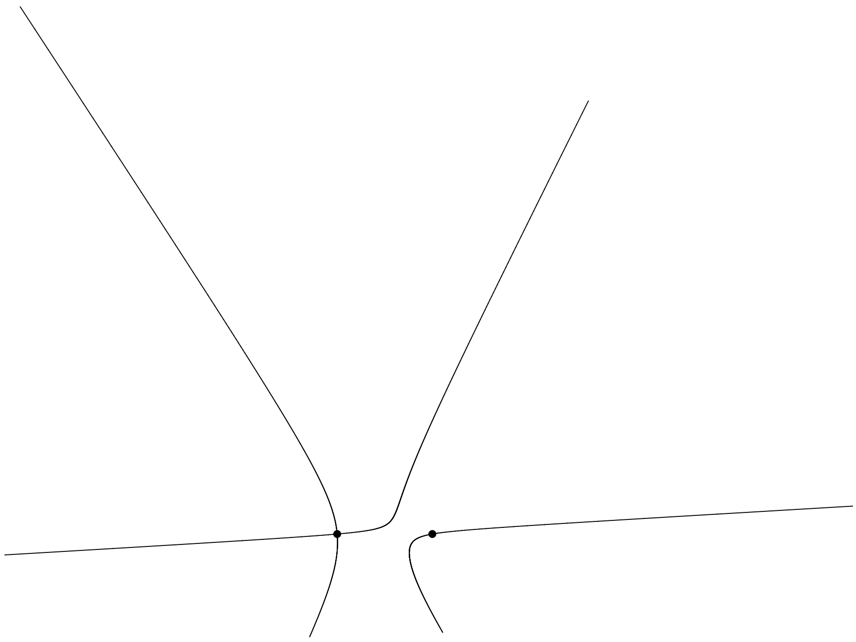








Links sieht man, welche Kurve sich ergibt, wenn sich die (gleichsinnigen) Winkelgeschwindigkeiten verhalten wie 1:1,1 (zu A gehört der Winkel σ, zu B der Winkel $1{,}1 \cdot \sigma + 10°$).



Die zu gegensinnigen Winkelgeschwindigkeiten gehörigen Kurven sind noch etwas bizarrer als die letzten vier Kurven. Links gehört zu A der Winkel σ, zu B der Winkel $-2 \cdot \sigma + 10°$).