

Jörg MEYER, Hameln

Etwas über Tetraeder

Dieser Text wird in unregelmäßigen Abständen ergänzt und wurde zuletzt am
1. 4. 2022
aktualisiert.

Alle Graphiken sind Vektorgraphiken und daher skalierbar.
Sie wurden in der Programmiersprache Java erstellt.

Inhalt

1	Einleitung.....	3
2	Notation.....	3
3	Ebene Winkel.....	4
3.1	Dreiecks- und Diederwinkel.....	4
3.2	Volumenformeln.....	6
3.3	Berechnung der Diederwinkel.....	6
3.4	Kanten-Flächenwinkel.....	7
4	Raumwinkel.....	7
4.1	Punkte auf der Einheitskugel.....	8
4.2	Seitenwinkel.....	8
4.3	Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks.....	9
4.4	Der Raumwinkel eines Tetraeders.....	10
4.5	Sinusbegriffe.....	11
5	Cosinussatz für Diederwinkel und Pythagoras.....	13
6	Noch eine Beziehung für das Volumen.....	15
7	Probleme mit der Kongruenz.....	15
8	Analogon der HERON-Formel beim Tetraeder.....	16
9	Spurpunkte.....	17
10	Der Ecken-Schwerpunkt.....	18
11	Höhen.....	19
12	Die flächenberührende Inkugel.....	19
13	Der Radius der Umkugel.....	20
14	Und noch einmal: Zum Tetraeder-Volumen V	23
15	Zum Mittelpunkt M' der Umkugel.....	23
16	Umkreis und Umkugel.....	24
17	Das gleichkantige Tetraeder.....	25

18	Die Umkugel des gleichkantigen Tetraeders	25
----	---	----

1 Einleitung

Das Tetraeder hat eine kompliziertere Geometrie als das Dreieck. So ist schon das Analogon zum Kongruenzsatz sss für Tetraeder falsch: Zwei Tetraeder mit den Kantenlängen $\{2, 2, 2, 3, 3, 3\}$ müssen nicht zueinander kongruent sein. Zwei Tetraeder-Höhen müssen sich nicht schneiden. Das Tetraedervolumen als Funktion der Kantenlängen ist komplizierter auszudrücken als der Flächeninhalt eines Dreiecks als Funktion der Seitenlängen. Es gibt zwar stets eine Umkugel, aber deren Mittelpunkt ist komplizierter zu beschreiben als der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks. Es gibt zwar einen Ecken-Schwerpunkt, und die Gerade durch diesen Schwerpunkt und eine Ecke schneidet die gegenüber liegende Fläche in deren Ecken-Schwerpunkt, aber eine solche Aussage ist nur für den Ecken-Schwerpunkt richtig¹, d.h. dass etwa die Gerade durch eine Ecke und den Um- oder In-Kugelmittelpunkt die gegenüber liegende Fläche nicht in deren Um- oder Inkreismittelpunkt schneidet².

2 Notation

Das Tetraeder wird **nicht** als regelmäßig vorausgesetzt.

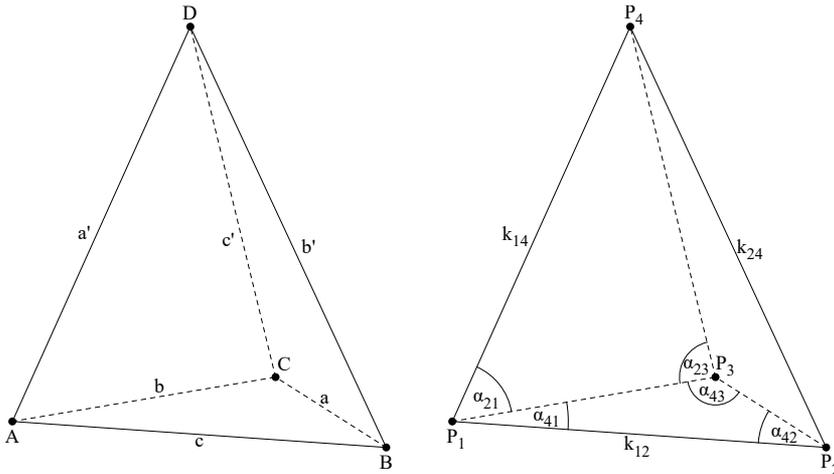
Es hat 4 Eckpunkte A, B, C, D , 4 Flächen und 6 Kanten a, b, c, a', b', c' .

Spätestens bei der Betrachtung der 12 Dreieckswinkel ist es naheliegend, eine zweite Notation einzuführen.

¹ M. Hajja, I.Hammoudeh, M. Hayajneh, H. Martini 2020: Concurrence of tetrahedral cevians associated with triangle centers. In: Journal of Geometry **111**, Artikel #8, 23 Seiten.

Auch: St. Rabinowitz 2020: Arrangement of central points on the faces of a tetrahedron. In: International Journal of Computer Discovered Mathematics **5**, S. 13-41.

² Einen vorzüglichen unf gut lesbaren Überblick über die Unterschiede zwischen Dreiecks- und Tetraedergeometrie liefern Hajja / Martini 2013: Orthocentric simplices as the true generalizations of triangles. In: Math. Intelligencer Heft 2, S. 16-28.

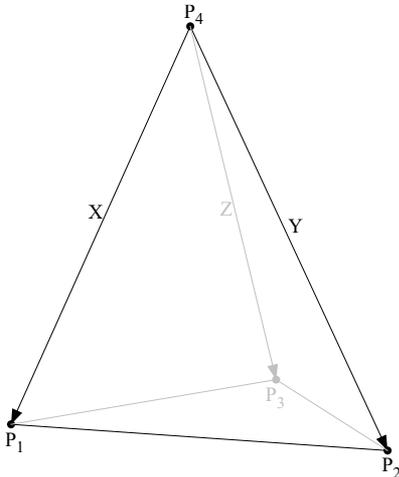


Gegenüber P_k liegt die Fläche F_k mit dem Inhalt f_k .
 Die *Dreieckswinkel* α_{ij} haben als ersten Index die Nummer der Fläche und als zweiten Index die Nummer des Punktes.
 Die Flächen F_i und F_j bilden den Keil- oder *Diederwinkel* β_{ij} . Deren Summe ist nicht konstant.

3 Ebene Winkel

3.1 Dreiecks- und Diederwinkel

... hängen miteinander zusammen:



Mit der Abkürzung $V^0 = \frac{V}{|V|}$ und mit

$$X = P_1 - P_4, \quad Y = P_2 - P_4, \quad Z = P_3 - P_4$$

und den nach außen zeigenden Normalenvektoren

$$N_1 = Y^0 \times Z^0, \quad N_2 = Z^0 \times X^0, \quad N_3 = X^0 \times Y^0$$

gilt unter Beachtung der GRASSMANN-Identität

$$(A \times B) \times C = (A \cdot C) \cdot B - (B \cdot C) \cdot A$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} N_2 \times N_3 &= (Z^0 \times X^0) \times N_3 = (Z^0 \cdot N_3) \cdot X^0 - (X^0 \cdot N_3) \cdot Z^0 \\ &= (Z^0 \cdot (X^0 \times Y^0)) \cdot X^0 - (X^0 \cdot (X^0 \times Y^0)) \cdot Z^0 = \frac{6 \cdot V}{k_{14} \cdot k_{24} \cdot k_{34}} \cdot X^0 \end{aligned}$$

und daher einerseits $\sin(\alpha_{14}) = |Y^0 \times Z^0|$ und andererseits

$$\sin(\beta_{23}) = \frac{|N_2 \times N_3|}{|N_2| \cdot |N_3|} = \frac{\frac{6 \cdot V}{k_{14} \cdot k_{24} \cdot k_{34}}}{|Z^0 \times X^0| \cdot |X^0 \times Y^0|}, \text{ zusammen also}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\beta_{23})}{\sin(\alpha_{14})} &= \frac{\frac{6 \cdot V}{k_{14} \cdot k_{24} \cdot k_{34}}}{|Y^0 \times Z^0| \cdot |Z^0 \times X^0| \cdot |X^0 \times Y^0|} \\ &= \frac{6 \cdot V}{k_{14} \cdot k_{24} \cdot k_{34} \cdot \sin(\alpha_{14}) \cdot \sin(\alpha_{24}) \cdot \sin(\alpha_{34})} = \frac{\sin(\beta_{23})}{\sin(\alpha_{14})} \end{aligned}$$

Da $\frac{\sin(\beta_{13})}{\sin(\alpha_{24})}$ und $\frac{\sin(\beta_{23})}{\sin(\alpha_{14})}$ aufgrund der Symmetrie dasselbe Ergebnis geliefert hätten, ist

$$\frac{\sin(\beta_{23})}{\sin(\alpha_{14})} = \frac{\sin(\beta_{13})}{\sin(\alpha_{24})} = \frac{\sin(\beta_{12})}{\sin(\alpha_{34})},$$

und anstatt von der Ecke 4 auszugehen, hätte man auch die drei anderen nehmen können, was auf

$$\begin{array}{l} \frac{\sin(\beta_{24})}{\sin(\alpha_{13})} = \frac{\sin(\beta_{14})}{\sin(\alpha_{23})} = \frac{\sin(\beta_{12})}{\sin(\alpha_{43})} \\ \frac{\sin(\beta_{34})}{\sin(\alpha_{12})} = \frac{\sin(\beta_{14})}{\sin(\alpha_{32})} = \frac{\sin(\beta_{13})}{\sin(\alpha_{42})} \\ \frac{\sin(\beta_{34})}{\sin(\alpha_{21})} = \frac{\sin(\beta_{12})}{\sin(\alpha_{31})} = \frac{\sin(\beta_{13})}{\sin(\alpha_{41})} \end{array}$$

führt.

Der Bruch $\frac{\sin(\beta_{12})}{\sin(\alpha_{34})}$ wird weiter unten als Quotient zweier zu einem Raumwinkel gehörenden Sinusbegriffe gedeutet werden.

3.2 Volumenformeln

Aus $\frac{6 \cdot V}{k_{14} \cdot k_{24} \cdot k_{34} \cdot \sin(\alpha_{14}) \cdot \sin(\alpha_{24}) \cdot \sin(\alpha_{34})} = \frac{\sin(\beta_{23})}{\sin(\alpha_{14})}$ folgt wegen

$2 \cdot f_2 = k_{14} \cdot k_{34} \cdot \sin(\alpha_{24})$ und $2 \cdot f_3 = k_{14} \cdot k_{24} \cdot \sin(\alpha_{34})$ die Beziehung

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{f_2 \cdot f_3 \cdot \sin(\beta_{23})}{k_{14}}$$

und analoge Formeln.

3.3 Berechnung der Diederwinkel

Wir interessieren uns für den Diederwinkel β_{24} .

Ein nach außen zeigender Normalenvektor von F_2 ist $N_2 = (P_1 - P_3) \times (P_4 - P_3)$

mit der Länge $n_2 = k_{13} \cdot k_{43} \cdot \sin(\alpha_{23})$.

Ein nach außen zeigender Normalenvektor von F_4 ist $N_4 = (P_2 - P_3) \times (P_1 - P_3)$

mit der Länge $n_4 = k_{23} \cdot k_{13} \cdot \sin(\alpha_{43})$.

Dann ist $-\cos(\beta_{24}) = \frac{N_2 \cdot N_4}{n_2 \cdot n_4}$.

Nach LAGRANGE ist $(X \times Y) \cdot (Y \times Z) = (X \cdot Y) \cdot (Y \cdot Z) - (X \cdot Z) \cdot Y^2$, also

$$\begin{aligned} & N_4 \cdot N_2 \\ &= ((P_2 - P_3) \times (P_1 - P_3)) \cdot ((P_1 - P_3) \times (P_4 - P_3)) \\ &= ((P_2 - P_3) \cdot (P_1 - P_3)) \cdot ((P_1 - P_3) \cdot (P_4 - P_3)) - ((P_2 - P_3) \cdot (P_4 - P_3)) \cdot (P_1 - P_3)^2 \\ &= k_{23} \cdot k_{13} \cdot \cos(\alpha_{43}) \cdot k_{13} \cdot k_{34} \cdot \cos(\alpha_{23}) - k_{23} \cdot k_{34} \cdot \cos(\alpha_{13}) \cdot k_{13}^2 \\ &= k_{13}^2 \cdot k_{23} \cdot k_{34} \cdot (\cos(\alpha_{43}) \cdot \cos(\alpha_{23}) - \cos(\alpha_{13})) \end{aligned}$$

und damit

$$\cos(\beta_{24}) = -\frac{N_2 \cdot N_4}{n_2 \cdot n_4} = \frac{\cos(\alpha_{13}) - \cos(\alpha_{23}) \cdot \cos(\alpha_{43})}{\sin(\alpha_{23}) \cdot \sin(\alpha_{43})} = \cos(\beta_{24})$$

Diese Formel entspricht dem Seiten-Cosinussatz eines sphärischen Dreiecks (s.u.).

3.4 Kanten-Flächenwinkel

Es gibt noch eine dritte Art von Winkeln, nämlich die *Kanten-Flächen-Winkel* zwischen einer Fläche und einer Kante. Der Winkel λ zwischen F_4 und der Kante P_1P_4 ist gegeben durch

$$\sin \lambda = \cos(90^\circ - \lambda) = \frac{N_4 \cdot (P_4 - P_1)}{n_4 \cdot a_{14}} = \frac{((P_3 - P_1) \times (P_2 - P_1)) \cdot (P_4 - P_1)}{k_{13} \cdot k_{12} \cdot \sin(\alpha_{41}) \cdot k_{14}}$$

$$= \frac{6 \cdot V}{k_{12} \cdot k_{13} \cdot k_{14} \cdot \sin(\alpha_{41})} = \frac{3 \cdot V}{f_4 \cdot k_{14}} = \sin \lambda$$

Schließlich gibt es noch die vier Raumwinkel:

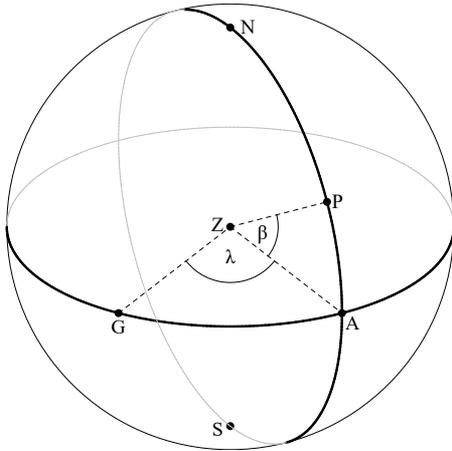
4 Raumwinkel

Man kann einen ebenen Winkel dadurch festlegen, dass man um den Scheitelpunkt einen Einheitskreis legt und als Winkelmaß den von den Schenkeln ausgeschnittenen Teilumfang definiert (Bogenmaß).

Das macht man beim Raumwinkel auch so: Um den Scheitelpunkt wird eine Einheitskugel gelegt, und das Winkelmaß ist der Flächeninhalt des von den Durchstoßpunkten der Schenkel definierten sphärischen Dreiecks. Der Vollwinkel hat das Maß $4 \cdot \pi$. Zur Erläuterung wird etwas über Grundtatsachen zu Kugeln ausgeholt³:

³ J. Meyer 2006: Einblick in die Erd-Kunde. In: Meyer, J. / Oldenburg, R. (Hrsg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Band 9. (Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe). Franzbecker Verlag, S. 120 - 140.

4.1 Punkte auf der Einheitskugel



Es seien $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Nordpol,

$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Südpol und $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der

Mittelpunkt. Zu jedem Kugelpunkt P gehört ein eindeutig bestimmter Punkt A auf dem Äquator.

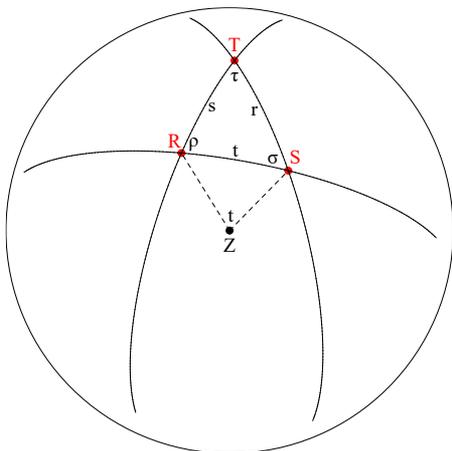
Auf dem Äquator gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt G, durch den der

Greenwich-Großkreis verläuft, so dass $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Die Win-

kel λ und β heißen geographische Länge und geographische Breite, und es ist

$$P = \cos \beta \cdot A + \sin \beta \cdot N = \cos \beta \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cdot \cos \beta \\ \sin \lambda \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = P(\lambda, \beta).$$

4.2 Seitenwinkel



Drei Kugelpunkte R, S, T bestimmen ein sphärisches Dreieck, dessen Seitenlinien von Großkreisen gebildet wird.

Die Seitenlängen r, s und t sind die Winkel $\sphericalangle TZS$, $\sphericalangle RZT$ und $\sphericalangle RZS$ im Bogenmaß; man nennt sie daher Seitenwinkel. Es ist

$$\cos t = R \cdot S; \quad \cos r = S \cdot T; \quad \cos s = T \cdot R$$

$$\sin t = |R \times S|; \quad \sin r = |S \times T|; \quad \sin s = |T \times R|$$

Die drei Eckenwinkel sind Schnittwinkel von Ebenen, so ist etwa τ der Schnittwinkel der Ebenen ZTR und ZST. Damit ist $\cos \gamma = \frac{(R \times T) \cdot (S \times T)}{|R \times T| \cdot |S \times T|}$. Aufgrund der

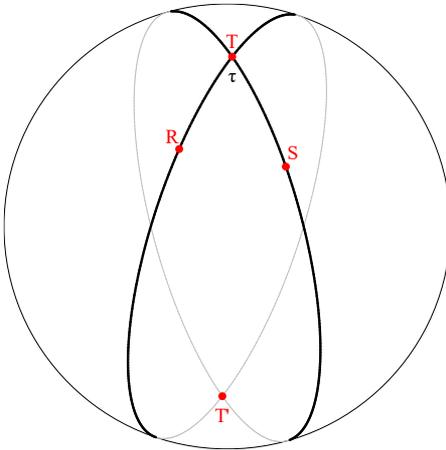
LAGRANGE-Identität $(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C) \cdot (B \cdot D) - (A \cdot D) \cdot (B \cdot C)$ folgt dann

$$\cos \tau = \frac{R \cdot S - (R \cdot T) \cdot (S \cdot T)}{\sin s \cdot \sin r} = \frac{\cos t - \cos s \cdot \cos r}{\sin s \cdot \sin r} = \cos \tau.$$

Diese Beziehung wird als Seiten-Cosinussatz bezeichnet.

Ein Kugeldreieck ist also (bis auf Lage) durch die drei Seitenwinkel vollständig bestimmt, da man nach dem Seiten-Cosinus-Satz die drei Eckenwinkel ausrechnen kann.

4.3 Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks

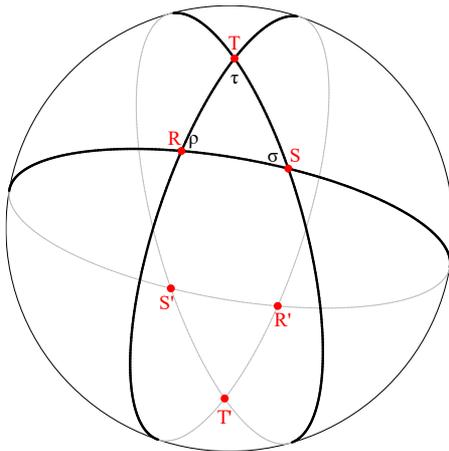


Betrachten wir zunächst den Flächeninhalt des durch R, S, T, T' gebildeten Zweiecks, wobei T' zu T antipodal liegen soll, d.h. mit

$$T = P(\lambda, \beta) \text{ ist } T' = P(180^\circ + \lambda, -\beta).$$

Misst man τ im Bogenmaß, so ist der Flächeninhalt von RT'T so groß wie

$$F_{RT'T} = \frac{\tau}{2 \cdot \pi} \cdot 4 \cdot \pi = 2 \cdot \tau = F_{RST} + F_{RST'}.$$



Auch S und R haben ihre Antipoden S' und R', und es gilt

$$2 \cdot \tau = F_{RST} + F_{RST'}$$

$$2 \cdot \rho = F_{RST} + F_{R'ST}$$

$$2 \cdot \sigma = F_{RST} + F_{RS'T}$$

Nun beinhalten RST zusammen mit TSR' und TR'S' (=T'RS) und TS'R die obere Hemisphäre, also auch RST und R'ST und RS'T und RST' zusammen.

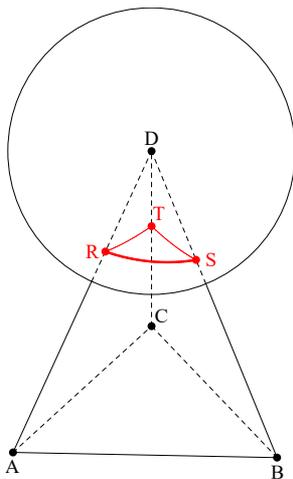
Daher ist

$$2 \cdot (\rho + \sigma + \tau) = 2 \cdot F_{RST} + \underbrace{(F_{RST} + F_{R'ST} + F_{RS'T} + F_{RST'})}_{2 \cdot \pi}$$

und somit $F_{RST} = \rho + \sigma + \tau - \pi$ (ρ, σ, τ im Bogenmaß).

Die Summe der Eckenwinkel eines sphärischen Dreiecks ist demnach stets größer als $2 \cdot \pi$.

4.4 Der Raumwinkel eines Tetraeders



Untersucht wird der Raumwinkel des Tetraeders ABCD bei D.

Dazu wird um D eine Einheitskugel gelegt; DA, DB und DC schneiden die Kugel in R, S, T.

Man bekommt die Eckenwinkel ρ, σ, τ des sphärischen Dreiecks RST als Schnittwinkel

$$\rho = \beta_{23}, \quad \sigma = \beta_{13}, \quad \tau = \beta_{12} \text{ der Ebenen}$$

$$DAB = P_4 P_1 P_2 \triangleq F_3$$

$$DBC = P_4 P_2 P_3 \triangleq F_1$$

$$DCA = P_4 P_3 P_1 \triangleq F_2$$

Der Raumwinkel Ω_4 bei D ist definiert als Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks RST und hat somit die Größe

$$\Omega_4 = \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{23} - \pi.$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^4 \Omega_i = 2 \cdot \sum_{i < j} \beta_{i,j} - 4 \cdot \pi$$

kann die Summe der Raumwinkel eines Tetraeders nicht konstant sein, da die Summe der Diederwinkel nicht konstant ist.

4.5 Sinusbegriffe

Es wäre schön, auch für Raumwinkel einen Sinusbegriff⁴ zu haben. Für ebene Winkel gilt $\sin \alpha = \frac{2 \cdot \Delta}{b \cdot c}$, wobei der Zähler den Flächeninhalt des von den Schenkeln eingeschlossenen Parallelogramms angibt und der Nenner das Produkt der Schenkellängen ist, und wegen $\sin \beta = \frac{2 \cdot \Delta}{a \cdot c}$ hat man den Sinussatz $b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$. Die Faktoren im Nenner haben jeweils eine Dimension weniger als der Zähler.

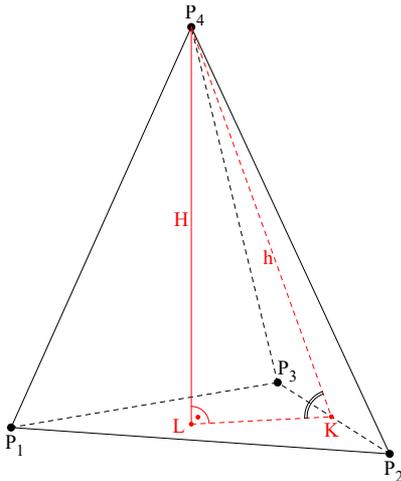
Für Raumwinkel kann man analog vorgehen und in den Zähler den Rauminhalt des von den Schenkeln eingeschlossenen Spats schreiben und in den Nenner das Produkt des jeweils von zwei Schenkeln eingeschlossenen Parallelogramms schreiben, was jedoch von der Dimension nur stimmen kann, wenn man den Zähler quadriert.

Dies liefert $\text{Sin}(\Omega_4) := \frac{(6 \cdot V)^2}{2 \cdot f_1 \cdot 2 \cdot f_2 \cdot 2 \cdot f_3} = \boxed{\frac{9}{2} \cdot \frac{V^2}{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3} = \text{Sin}(\Omega_4)}$, und wegen

$\text{Sin}(\Omega_3) = \frac{9}{2} \cdot \frac{V^2}{f_1 \cdot f_2 \cdot f_4}$ hat man das Analogon zum Sinussatz, nämlich

$$\boxed{\frac{\text{Sin}(\Omega_3)}{f_3} = \frac{\text{Sin}(\Omega_4)}{f_4}}$$

1 ⁴ F. Eriksson 1978: The law of sines for tetrahedra and n-simplices. In: Geometriae Dedicata 7, S. 71–80. Dort finden sich auch historische Bemerkungen.



Die Raumhöhe H ist kleiner als die Flächenhöhe h .

Der zweigestrichene Winkel bei K ist β_{14} , und es gilt

$$\sin(\beta_{14}) = \frac{H}{h}$$

mit $H = \frac{3 \cdot V}{f_4}$ und $h = \frac{2 \cdot f_1}{k_{23}}$ und daher

$$\sin(\beta_{14}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{V \cdot k_{23}}{f_1 \cdot f_4}$$

und analoge Formeln.

Damit ist

$$\begin{aligned} \sin(\Omega_4) &= \frac{9}{2} \cdot \frac{V^2}{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin(\beta_{12})}{k_{34}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin(\beta_{13})}{k_{24}} \cdot f_1 \\ &= 2 \cdot \frac{\sin(\beta_{12}) \cdot \sin(\beta_{13})}{k_{34} \cdot k_{24}} \cdot \frac{1}{2} \cdot k_{34} \cdot k_{24} \cdot \sin(\alpha_{14}) \\ &= \boxed{\sin(\beta_{12}) \cdot \sin(\beta_{13}) \cdot \sin(\alpha_{14}) = \text{Sin}(\Omega_4)} \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $-1 \leq \text{Sin}(\Omega_4) \leq 1$ ist.

Der Produktformel scheint es an Symmetrie zu mangeln, daher muss

$$\sin(\beta_{12}) \cdot \sin(\beta_{13}) \cdot \sin(\alpha_{14}) = \text{Sin}(\Omega_4) = \sin(\beta_{12}) \cdot \sin(\beta_{23}) \cdot \sin(\alpha_{24})$$

sein, also $\sin(\beta_{13}) \cdot \sin(\alpha_{14}) = \sin(\beta_{23}) \cdot \sin(\alpha_{24})$. Dies entspricht der bekannten Beziehung

$$\frac{\sin(\beta_{23})}{\sin(\alpha_{14})} = \frac{\sin(\beta_{13})}{\sin(\alpha_{24})}$$

Ein *anderer* Sinusbegriff für den Raumwinkel ist der *Polarsinus*, bei dem durch die Schenkellängen geteilt wird, was zu

$$\text{PSin}(\Omega_4) := \frac{6 \cdot V}{k_{14} \cdot k_{24} \cdot k_{34}}$$

führt. Dass auch der Polarsinus zwischen 0 und 1 liegt, zeigt

$$\begin{aligned} \text{PSin}(\Omega_4) &= \frac{6 \cdot V}{k_{14} \cdot k_{24} \cdot k_{34}} = \frac{2 \cdot f_2 \cdot 2 \cdot f_3 \cdot \sin(\beta_{23})}{k_{14} \cdot k_{14} \cdot k_{24} \cdot k_{34}} \\ &= \boxed{\sin(\alpha_{24}) \cdot \sin(\alpha_{34}) \cdot \sin(\beta_{23}) = \text{PSin}(\Omega_4)} \end{aligned}$$

Auch hier gilt

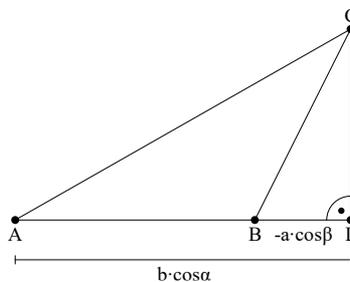
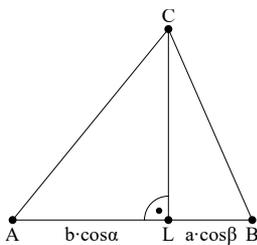
$$\sin(\alpha_{24}) \cdot \sin(\alpha_{34}) \cdot \sin(\beta_{23}) = \text{PSin}(\Omega_4) = \sin(\alpha_{14}) \cdot \sin(\alpha_{34}) \cdot \sin(\beta_{13}) \text{ wegen}$$

$$\frac{\sin(\beta_{23})}{\sin(\alpha_{14})} = \frac{\sin(\beta_{13})}{\sin(\alpha_{24})}.$$

Der Quotient beider Sinusbegriffe ist

$$\left[\frac{\text{Sin}(\Omega_4)}{\text{PSin}(\Omega_4)} = \frac{\sin(\beta_{12})}{\sin(\alpha_{34})} = \frac{\sin(\beta_{23})}{\sin(\alpha_{14})} = \frac{\sin(\beta_{13})}{\sin(\alpha_{24})} \right].$$

5 Cosinussatz für Diederwinkel und Pythagoras



Beim Dreieck ist
 $c = b \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \beta$
 (man beachte, dass
 im stumpfwinkligen
 Fall $\cos \beta$ negativ
 ist).

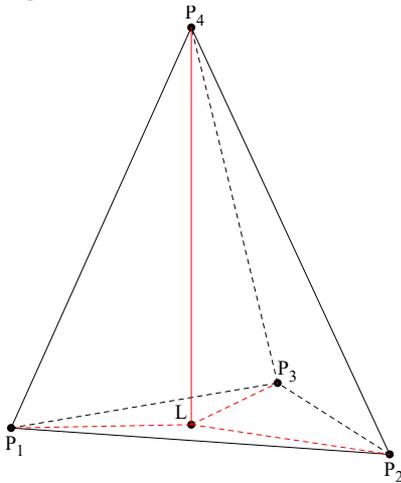
Analog gilt

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta$$

$$b = c \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \gamma$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit c , die zweite mit $-a$ und die dritte mit $-b$ und addiert anschließend, bekommt man den Cosinussatz des Dreiecks in der Form $c^2 - a^2 - b^2 = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$.

Gegeben sei das Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$.



Es ist L der Lotfußpunkt von P_4 auf F_4 .

L teilt F_4 in drei Teildreiecke auf:

$$f_4 = |LP_2P_3| + |P_1LP_3| + |P_1P_2L|$$

$$= f_1 \cdot \cos \beta_{14} + f_2 \cdot \cos \beta_{24} + f_3 \cdot \cos \beta_{34}$$

und analog

$$f_1 = f_2 \cdot \cos \beta_{12} + f_3 \cdot \cos \beta_{13} + f_4 \cdot \cos \beta_{14}$$

$$f_2 = f_1 \cdot \cos \beta_{12} + f_3 \cdot \cos \beta_{23} + f_4 \cdot \cos \beta_{24}$$

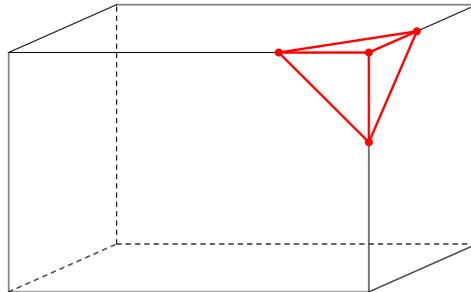
$$f_3 = f_1 \cdot \cos \beta_{13} + f_2 \cdot \cos \beta_{23} + f_4 \cdot \cos \beta_{34}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit f_4 , die zweite mit $-f_1$, die dritte mit $-f_2$ und die letzte mit $-f_4$ und addiert alle Gleichungen, so hat man das Analogon⁵ zum Cosinussatz für Diederwinkel

$$f_4^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \cos \beta_{12} - 2 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cos \beta_{23} - 2 \cdot f_3 \cdot f_1 \cdot \cos \beta_{31} .$$

Sind bei P_4 nur rechte Winkel, so ist $f_4^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$.

Man kann diese Formel als „Quaderecken-Pythagoras“ bezeichnen, da man ein Tetraeder, bei dem von einem Eckpunkt aus alle Flächen rechtwinklig zueinander sind, als Quaderecke ansehen kann.



Es ist so, dass die Umkehrung des Quaderecken-Pythagoras **nicht** gilt.

⁵ August Leopold Crelle; Sammlung mathematischer Aufsätze I, 1821, S. 108. Die Beziehung soll schon 1803 bei L. N. M. Carnot stehen.

6 Noch eine Beziehung für das Volumen

Es sei $Z = D - A$, $Y = D - B$, $X = D - C$.

Der *Abstand* zwischen zwei Gegenkanten, also etwa zwischen den Geraden AD und BC mit den allgemeinen Punkten

$$G = A + \lambda \cdot (D - A) = A + \lambda \cdot Z \quad \text{und} \quad G = B + \mu \cdot (B - C) = B + \mu \cdot (X - Y)$$

ist der Abstand zwischen A und der Ebene mit $G = B + \mu \cdot (X - Y) + \lambda \cdot Z$ bzw.

$$0 = (G - B) \cdot ((X - Y) \times Z)$$

und beträgt

$$\begin{aligned} \text{dist}(a, a') &= (A - B) \cdot \frac{(X - Y) \times Z}{a \cdot a' \cdot \sin(a, a')} = (Y - Z) \cdot \frac{(X - Y) \times Z}{a \cdot a' \cdot \sin(a, a')} \\ &= Y \cdot \frac{(X - Y) \times Z}{a \cdot a' \cdot \sin(a, a')} = \frac{Y \cdot X \times Z}{a \cdot a' \cdot \sin(a, a')} = \frac{6 \cdot V}{a \cdot a' \cdot \sin(a, a')} \end{aligned}$$

mit der Folgerung

$$V = \frac{a \cdot a'}{6} \cdot \text{dist}(a, a') \cdot \sin(a, a').$$

7 Probleme mit der Kongruenz

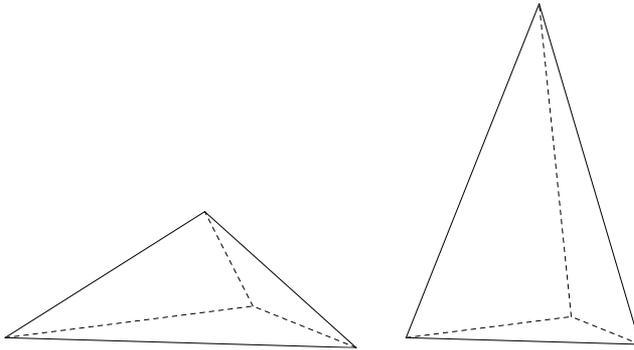
Es sei $a = b = c = u$ und $a' = b' = c' = v$. Das Dreieck ABC hat die Flächenhöhe

$h = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{3}$ und den Flächeninhalt $\Delta = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot u = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot u^2$. Die Raumhöhe H

ermittelt sich wegen $v^2 = H^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot h\right)^2 = H^2 + \left(\frac{u}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 = H^2 + \frac{u^2}{3}$ zu

$$H = \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{3}}.$$

Das Volumen beträgt dann $V(u, v) = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot u^2 \cdot \sqrt{v^2 - \frac{u^2}{3}}$ mit $V(u, u) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot u^3$.



Nur für $u=v$ ist $V(u, v) = V(v, u)$.

Insbesondere ist

$$V(2, 3) = \frac{\sqrt{23}}{3} \text{ und}$$

$$V(3, 2) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Das ist bemerkenswert: Kennt man die drei Seitenlängen eines Dreiecks, so ist dieses bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Kennt man die sechs Kantenlängen eines Tetraeders, so ist dieses zwar eindeutig konstruierbar, aber **nicht** bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

8 Analogon der HERON-Formel beim Tetraeder

Das **Dreieck** mit den Eckpunkten $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat den doppel-

ten Flächeninhalt $2 \cdot \Delta = |\mathbf{B} \times \mathbf{C}| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$

Die CAYLEY-MENGER-Matrix⁶ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & AA^2 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & BA^2 & BB^2 & BC^2 \\ 1 & CA^2 & CB^2 & CC^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$ hat die

Determinante

$$m = -(a+b+c) \cdot (-a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c) = \boxed{-16 \cdot \Delta^2 = m}.$$

⁶ M. Berger, Geometry 1, Springer.

Das **Tetraeder** mit den Eckpunkten $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ hat

den sechsfachen Rauminhalt $6 \cdot V = \left| (B \times C) \cdot D \right| = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$.

Die CAYLEY-MENGER-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & AA^2 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & BA^2 & BB^2 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & CA^2 & CB^2 & CC^2 & CD^2 \\ 1 & DA^2 & DB^2 & DC^2 & DD^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 & a'^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & c'^2 \\ 1 & a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ hat die Deter-}$$

minante $m = 8 \cdot (6 \cdot V)^2 = \boxed{288 \cdot V^2 = m}$. Damit ist das Volumen durch die Kantenlängen ausgedrückt⁷.

Im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall des Dreiecks ist die Determinante m im dreidimensionalen Fall nicht in Linearfaktoren zerlegbar und sogar irreduzibel⁸.

9 Spurpunkte

Ist $P = (p_1 : p_2 : p_3 : p_4)$ ein Punkt, so schneidet DP mit dem allgemeinen

Punkt $X(\lambda) = P + \lambda \cdot (P - D)$ die Ebene ABC für $\lambda = \frac{p_4}{p_1 + p_2 + p_3}$ im „Spurpunkt“

$(p_1 : p_2 : p_3 : 0)$.

Die Ebene durch $P = (p_1 : p_2 : p_3 : p_4)$ und CD hat den allgemeinen Punkt

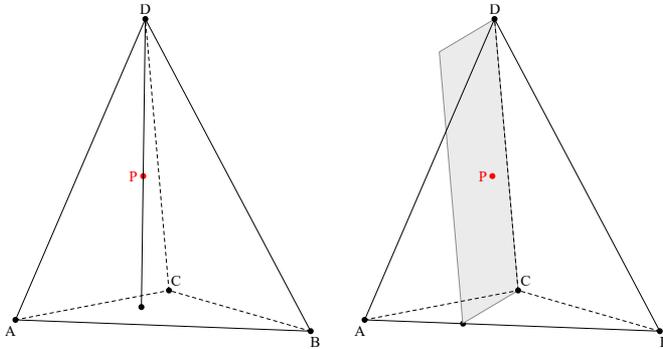
$X(\lambda, \mu) = P + \lambda \cdot (P - C) + \mu \cdot (P - D)$. Mit $\lambda = \frac{p_3}{p_1 + p_2}$ und $\mu = \frac{p_4}{p_1 + p_2}$ bekommt

⁷ Eine „Geschichte“ dieser Formel findet sich in R. Hersh 2004: Heron's area formula: What about a tetrahedron? In: College Mathematics Journal **35**(2), S. 112-114.

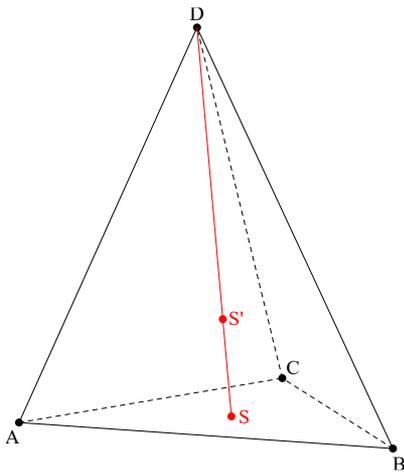
⁸ D'Andrea/Sombra 2005: The Cayley-Menger determinant is irreducible for $n \geq 3$. In: Siberian Math. Journ. **46** (1), S. 71-76.

man als Schnittpunkt der erwähnten Ebene mit der Gegenkante AB den Punkt $(p_1 : p_2 : 0 : 0)$.

Alternativer Weg: Die Ebene durch P, C und D hat die Gleichung $p_2 \cdot x_1 = p_1 \cdot x_2$.



10 Der Ecken-Schwerpunkt



Der Ecken-Schwerpunkt von ABC ist $S = \frac{A+B+C}{3}$; ein beliebiger Punkt auf der Geraden durch S und D hat die Form $X(\lambda) = D + \lambda \cdot \left(\frac{A+B+C}{3} - D \right)$; mit $\lambda = \frac{3}{4}$ hat man das in A, B, C und D symmetrische Resultat $X\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{D}{4} + \frac{A+B+C}{4} =: S' = (1 : 1 : 1 : 1)$. Dies ist der Ecken-Schwerpunkt des Tetraeders ABCD.

S ist auch Mittelpunkt der Kanten-Mittelpunkte $\frac{A+B}{2}$ und $\frac{C+D}{2}$.

Die Ebene durch AB und $\frac{C+D}{2}$ hat den allgemeinen Punkt

$$X(\lambda, \mu) = \frac{C+D}{2} + \lambda \cdot \left(A - \frac{C+D}{2} \right) + \mu \cdot \left(B - \frac{C+D}{2} \right)$$

und den speziellen Punkt $X\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = S$.

Alternative Zugangsart: Eine Ebene $[f_1 : f_2 : f_3 : f_4]$ ist durch die Gleichung $f_1 \cdot p_1 + f_2 \cdot p_2 + f_3 \cdot p_3 + f_4 \cdot p_4 = 0$ festgelegt.

Die Ebene durch $\frac{A+B}{2} = (1 : 1 : 0 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1 : 0)$ und $D = (0 : 0 : 0 : 1)$

hat die Gleichung $f_1 = f_2$, die 5 dazu analogen Ebenen eine analoge Form.

Alle 6 Ebenen durch den Mittelpunkt einer Kante und durch die Gegenkante schneiden einander in $S = (1 : 1 : 1 : 1)$.

11 Höhen

Wenn sich die Höhen durch A und durch B schneiden, dann hat der Schnittpunkt H einerseits die Darstellung $H = A + \lambda \cdot ((B-D) \times (D-C))$ und andererseits die Darstellung $H = B + \mu \cdot ((A-D) \times (D-C))$.

Dann ist $H-A \perp D-C$ und $H-B \perp D-C$, also $(H-A) - (H-B) = \boxed{B-A \perp D-C}$.

Nun sei umgekehrt $(B-A) \cdot (D-C) = 0$. Die Höhe durch A liegt in den Ebenen mit $(X-A) \cdot (B-D) = 0$ und $(X-A) \cdot (D-C) = 0$, und die Höhe durch B liegt in den Ebenen mit $(X-B) \cdot (A-D) = 0$ und $(X-B) \cdot (D-C) = 0$.

Wegen $B \cdot (D-C) = A \cdot (D-C)$ liegen beide Höhen in der Ebene mit $X \cdot (D-C) = A \cdot (D-C) = B \cdot (D-C)$. Da die Höhen nicht zueinander parallel sind, müssen sie sich schneiden.

Somit gilt: Die Höhen durch A und durch B schneiden einander genau dann, wenn AB zur Gegenkante CD senkrecht steht.

12 Die flächenberührende Inkugel

Auf der Fläche F_k stehe der Normalenvektor N_k senkrecht.

Der Punkt $W = \frac{f_1 \cdot P_1 + f_2 \cdot P_2 + f_3 \cdot P_3 + f_4 \cdot P_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}$ hat von F_1 den Abstand

$$\begin{aligned} \pm d(W, F_1) &= \frac{(W' - P_2) \cdot N_1}{2 \cdot f_1} \\ &= \frac{\left(\frac{f_1 \cdot P_1 + f_3 \cdot P_3 + f_4 \cdot P_4 - P_2 \cdot (f_1 + f_3 + f_4)}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4} \right) \cdot N_1}{2 \cdot f_1} \\ &= \frac{\overbrace{f_3 \cdot (P_3 - P_2)}^{=0} \cdot N_1 + \overbrace{f_4 \cdot (P_4 - P_2)}^{=0} \cdot N_1 + f_1 \cdot (P_1 - P_2) \cdot N_1}{2 \cdot f_1 \cdot (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)} \\ &= \frac{(P_1 - P_2) \cdot N_1}{2 \cdot (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)} \end{aligned}$$

Wegen $N_1 = (P_3 - P_2) \times (P_4 - P_2)$ ist $d(W, F_1) = \frac{3 \cdot V}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4} =: \rho$ symme-

trisch in den Indizes und damit so groß wie die Abstände von W zu den übrigen Flächen. Damit ist ρ der Radius der flächenberührenden Inkugel und W deren Mittelpunkt⁹.

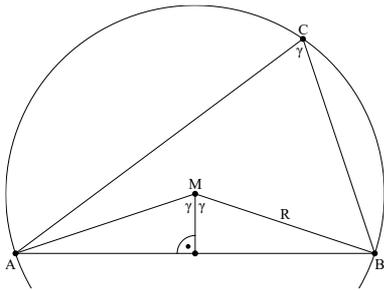
13 Der Radius der Umkugel

... ist seit über 200 Jahren bekannt¹⁰, aber erst Karl Georg Christian VON STAUDT (1798 - 1867) gelang ein Beweis¹¹, der sich nicht auf umfangreiche Rechnungen stützen musste. Der Zugang von VON STAUDT ist elementarer als manch neuerer Zugang.

⁹ Die Geraden durch die Inkugel-Berührpunkte zu den gegenüber liegenden Ecken sind i.a. **nicht** kopunktal.

¹⁰ August Leopold Crelle (1821): Sammlung mathematischer Aufsätze I (Einige Bemerkungen über die dreiseitige Pyramide), S. 105 ff.

¹¹ Karl von Staudt (1860): Ueber einige geometrische Sätze. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik **57**, S. 88-89.



Der Umkreisradius R eines Dreiecks hat aufgrund des Umfangswinkelsatzes die Größe

$$R = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \gamma} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{\Delta} \quad (\text{mit } \Delta \text{ als Flächeninhalt des Dreiecks } ABC).$$

Für Kugeln gilt allerdings der Umfangswinkelsatz nicht, man muss also anders vorgehen.

Wird der Abstand zwischen zwei Punkten P und Q mit PQ bezeichnet, so ist

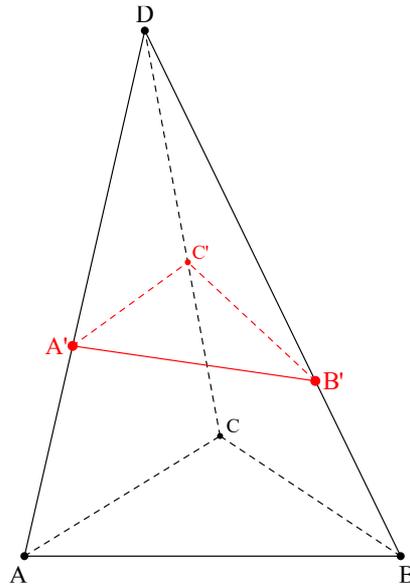
$$V = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{6} \cdot P \sin(\Omega_A).$$

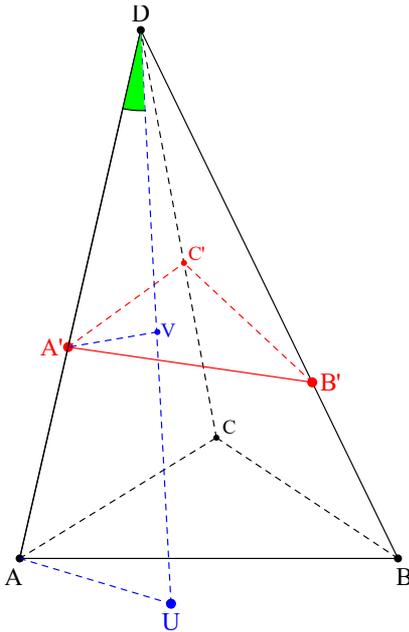
Insbesondere gilt: Ist $AB'C'D'$ ein Teiltetraeder von $ABCD$, so ist

$$\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD}.$$

Die Idee von VON STAUDT war, zum gegebenen Tetraeder $ABCD$ ein Teiltetraeder $A'B'C'D'$ zu betrachten und dabei $A'B'C'$ so zu wählen, dass die zugehörige Ebene im Abstand h parallel zur Tangentialebene in D ist. Der Abstand h wird sich am Schluss herauskürzen.

Dann ist $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot DC'}{DA \cdot DB \cdot DC} =: \frac{p'}{p}.$





Nun sei DU eine Durchmessergerade, die die Ebene des roten Dreiecks in V trifft.

Dann ist $DV=h$ und $DU=2 \cdot R$ mit R als Kugel-Radius.

Das Dreieck $A'VD$ hat bei V einen rechten Winkel, und das Dreieck AUD hat wegen Thales bei A einen rechten Winkel.

Der Cosinus des grünen Winkels ist einerseits

$$\frac{DV}{DA'} = \frac{h}{DA'}$$

und andererseits $\frac{DA}{DU} = \frac{DA}{2 \cdot R}$, woraus $DA \cdot DA' = 2 \cdot R \cdot h$ folgt.

Analog gilt auch $DB \cdot DB' = 2 \cdot R \cdot h$ und $DC \cdot DC' = 2 \cdot R \cdot h$. Wegen $\frac{DA}{DB} = \frac{DB'}{DA'}$ sind die Dreiecke DAB und $DB'A'$ zueinander ähnlich, also gilt $\frac{DA}{AB} = \frac{DB'}{A'B'}$ und deshalb $DA \cdot A'B' = DB' \cdot AB$.

Dies schreibt sich etwas symmetrischer, wenn beide Seiten mit $DB \cdot DC$ multipliziert werden, was auf $\underbrace{DA \cdot DB \cdot DC}_p \cdot A'B' = \underbrace{DB' \cdot DB \cdot DC}_{2 \cdot R \cdot h}$ und damit auf

$$A'B' = \frac{2 \cdot R \cdot h}{p} \cdot AB \cdot DC \text{ führt.}$$

Analog folgt $B'C' = \frac{2 \cdot R \cdot h}{p} \cdot BC \cdot DA$ und $C'A' = \frac{2 \cdot R \cdot h}{p} \cdot CA \cdot DB$.

Damit kennt man die Seitenlängen des roten Dreiecks $A'B'C'$.

Das rote Dreieck ist ähnlich zu einem Dreieck T mit den Seiten-, „Längen“

$$BC \cdot DA = a \cdot A', \quad CA \cdot DB = b \cdot b', \quad AB \cdot DC = c \cdot c'.$$

Damit ist der Flächeninhalt des roten Dreiecks so groß wie

$$\Delta_{A'B'C'} = \left(\frac{2 \cdot R \cdot h}{p} \right)^2 \cdot \Delta_T.$$

$$\text{Andererseits ist } V_{A'B'C'D} = \frac{\Delta_{A'B'C'} \cdot h}{3}, \text{ also } \Delta_{A'B'C'} = \frac{3}{h} \cdot V_{A'B'C'D} = \frac{3}{h} \cdot \frac{p'}{p} \cdot V_{ABCD}$$

$$\text{und damit } \frac{3}{h} \cdot \frac{p'}{p} \cdot V_{ABCD} = \left(\frac{2 \cdot R \cdot h}{p} \right)^2 \cdot \Delta_T \text{ oder } 3 \cdot p' \cdot p \cdot V_{ABCD} = 4 \cdot R^2 \cdot h^3 \cdot \Delta_T \text{ und}$$

$$\text{wegen } p \cdot p' = (2 \cdot R \cdot h)^2 \text{ schließlich } \boxed{R = \frac{\Delta_T}{6 \cdot V_{ABCD}}}.$$

Das Ergebnis ist so merkwürdig wie der Weg dorthin, da das aus den Produkten der Gegenkanten gebildete Dreieck T keine anschauliche Bedeutung zu haben scheint.

14 Und noch einmal: Zum Tetraeder-Volumen V

In der Ebene F_1 liegt das Dreieck $P_2P_3P_4 = BCD$ mit dem Normalenvektor

$$N_1 = \underbrace{(P_4 - P_3)}_X \times \underbrace{(P_4 - P_2)}_Y = \underbrace{(D - C)}_X \times \underbrace{(D - B)}_Y.$$

In der Ebene F_2 liegt das Dreieck $P_3P_4P_1 = CDA$ mit dem Normalenvektor

$$N_2 = \underbrace{(P_4 - P_3)}_X \times \underbrace{(P_4 - P_1)}_Z = \underbrace{(D - C)}_X \times \underbrace{(D - A)}_Z.$$

Wegen der GRASSMANN-Identität $(E \times F) \times G = (E \cdot G) \cdot F - (F \cdot G) \cdot E$ ist

$$N_1 \times N_2 = (X \times Y) \times (X \times Z) = -(Y \cdot (X \times Z)) \cdot X = -6 \cdot V \cdot X \text{ mit } V \text{ als Volumen des Te-}$$

$$\text{traeders, also } \boxed{V = \frac{|N_1 \times N_2|}{6 \cdot c'} = \frac{|N_1 \times N_2|}{6 \cdot k_{34}}}.$$

15 Zum Mittelpunkt M' der Umkugel

Schneidet man die Umkugel mit der Ebene, in der die Fläche F_k liegt, so bekommt man den Umkreis des in F_k liegenden Dreiecks. Dessen Mittelpunkt M_k hat die Eigenschaft, dass $M'M_k$ auf F_k senkrecht steht.

Ist N_k ein Normalenvektor zu F_k , so ist M' Schnittpunkt der vier Lotgeraden mit den allgemeinen Punkten $X = M_k + \lambda_k \cdot N_k$.

Die Geraden mit $X = M_1 + \lambda \cdot N_1$ und $X \times N_2 = M_2 \times N_2$ schneiden einander für

$$\lambda = \frac{|(M_2 - M_1) \times N_2|}{|N_1 \times N_2|} = \frac{|(M_2 - M_1) \times N_2|}{6 \cdot V \cdot c'}$$

$$\text{in } \boxed{M' = M_1 + \frac{|(M_2 - M_1) \times N_2|}{6 \cdot V \cdot c'} \cdot N_1}$$

Setzt man für M_1, M_2, N_1, N_2 ein, wird das Resultat¹² nicht übersichtlicher.

16 Umkreis und Umkugel

Bei einem **Dreieck** hat der Umkreis den Radius

$$R = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot \Delta} = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{-m}}$$

mit m als Determinante der CAYLEY-MENGER-Matrix.

Der Zähler hat zu tun mit der Matrix $\begin{pmatrix} AA^2 & AB^2 & AC^2 \\ BA^2 & BB^2 & BC^2 \\ CA^2 & CB^2 & CC^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$ und

deren Determinante $\mu = 2 \cdot (a \cdot b \cdot c)^2$, so dass $\boxed{R = \sqrt{-\frac{\mu}{2 \cdot m}}}$ resultiert.

Bei einem **Tetraeder** hat die Umkugel den Radius $R = \frac{\Delta_T}{6 \cdot V} = \frac{\Delta_T}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{8}$ mit Δ_T

als Flächeninhalt des Dreiecks mit den „Seitenlängen“ $a \cdot a', b \cdot b', c \cdot c'$.

Dieser Wert hat zu tun mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} AA^2 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ BA^2 & BB^2 & BC^2 & BD^2 \\ CA^2 & CB^2 & CC^2 & CD^2 \\ DA^2 & DB^2 & DC^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 & b^2 & a'^2 \\ c^2 & 0 & a^2 & b'^2 \\ b^2 & a^2 & 0 & c'^2 \\ a'^2 & b'^2 & c'^2 & 0 \end{pmatrix}$$

und deren Determinante

$$\mu = -16 \cdot \Delta_T^2, \text{ so dass } R = \frac{\Delta_T}{6 \cdot V} = \frac{\Delta_T}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{8} = \frac{\sqrt{-\mu}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{4} = \boxed{\sqrt{-\frac{\mu}{2 \cdot m}} = R}$$
 resultiert.

¹² Das Resultat findet sich etwa in St. Rabinowitz 2020: Arrangement of central points on the faces of a tetrahedron. In: International Journal of Computer Discovered Mathematics **5**, S. 39 f.

Umkreis-Radius und Umkugel-Radius haben die gleiche Struktur!

17 Das gleichkante Tetraeder

Die gemeinsame Kantenlänge sei a . Die Dreiecksfläche beträgt $\Delta = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Wegen $\alpha_{ij} = 60^\circ$ ist $\cos(\beta_{24}) = \frac{1}{3}$ und $\beta_{24} \approx 70,5^\circ$.

Die Flächen-Höhe (=Flächen-Seitenhalbierende) beträgt $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$.

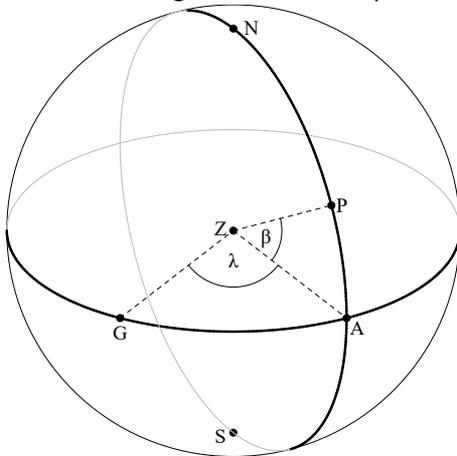
Die Raumhöhe hat also den Wert $H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot h\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a$.

Damit beträgt das Volumen $V = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$.

Für den Winkel zwischen Fläche und Kante gilt $\sin \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\lambda \approx 54,7^\circ$.

18 Die Umkugel des gleichkantigen Tetraeders

Die Einheits-Kugel hat den Nordpol N, den Südpol S und den Mittelpunkt Z.



Zu jedem Kugelpunkt P gehört ein eindeutig bestimmter Punkt A auf dem Äquator.

Auf dem Äquator gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt G, durch den der Greenwich-Großkreis verläuft.

In der Äquatorebene gehört zu A ein eindeutig bestimmter Winkel λ , die geographische Länge.

In der Äquatorebene ist

$$A = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix}.$$

Der Winkel β gibt die geographische Breite an. Der Winkel β nimmt nicht alle Werte an, sondern ist durch $-90^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ eingeschränkt.

Um P zu verorten, betrachten wir den Großkreis durch $A = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$, P und

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Dann ist } P = \cos \beta \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cos \lambda \cdot \cos \beta \\ \sin \lambda \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}} = P(\lambda, \beta).$$

Ein gleichkantiges Tetraeder hat als Eckpunkte

$$P(0^\circ, 90^\circ), P(0^\circ, \beta), P(120^\circ, \beta), P(240^\circ, \beta).$$

Der Abstand zwischen $P(0^\circ, \beta)$ und $P(120^\circ, \beta)$ hat wegen

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \cos \beta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ \sin \beta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \beta \text{ den Wert } \sqrt{3} \cdot \cos \beta.$$

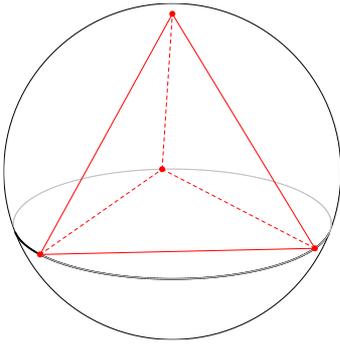
Der Abstand zwischen $P(0^\circ, 90^\circ)$ und $P(0^\circ, \beta)$ hat wegen $\begin{pmatrix} -\cos \beta \\ 0 \\ 1 - \sin \beta \end{pmatrix}$ den

Wert $\sqrt{2 \cdot (1 - \sin \beta)}$.

Beide Abstandsquadrate stimmen überein für $3 \cdot (1 - \sin^2 \beta) = 2 \cdot (1 - \sin \beta)$,

also für $\beta = 90^\circ$ (dann liegen alle Punkte auf dem Nordpol) oder für

$$\sin \beta = -\frac{1}{3}.$$



Die Punkte sind dann

$$P(0^\circ, 90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; P(0^\circ, \beta) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P(120^\circ, \beta) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix}; P(240^\circ, \beta) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Kantenlänge beträgt $k = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Ist umgekehrt die Kantenlänge a , so ist $\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot a$ der Radius der Umkugel und

$V = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a^3$ deren Volumen.