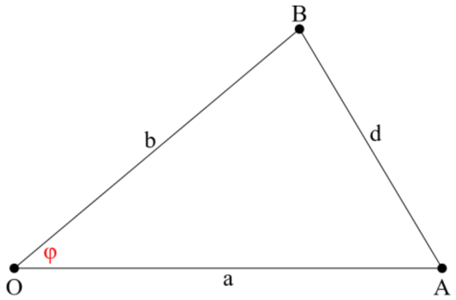
Jörg MEYER, Hameln

Zum Skalar- und zum Vektorprodukt

Der klassische Weg zum Skalarprodukt



... beginnt mit der Frage nach dem **Winkel** zwischen zwei Vektoren. Es sei $\vec{A} := \overrightarrow{OA}$ usw.; ferner $a := \left|\overline{OA}\right|$ usw. sowie $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ usw. Die Antwort liefert der Cosinussatz $d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi$ wegen

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - \left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right)}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{a \cdot b}.$$

Der Zähler rechts kommt häufig vor; es lohnt sich die Kurzbezeichnung $\boxed{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 =: \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$.

(Im Dreidimensionalen bekommt man einen analogen Ausdruck mit größerem Rechenaufwand.)

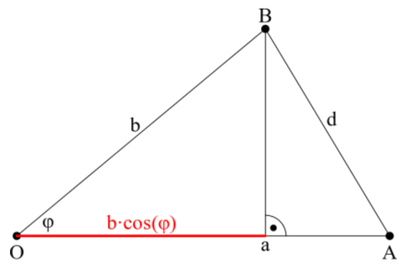
Was hat es mit diesem Ausdruck auf sich?

Für $\vec{A} = \vec{B}$ bekommt man das Abstandsquadrat, also $\boxed{\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{\left(\vec{A}\right)^2}}$. Es ist ein beliebter Fehler, die Wurzel zu $\vec{A}$ zu vereinfachen.

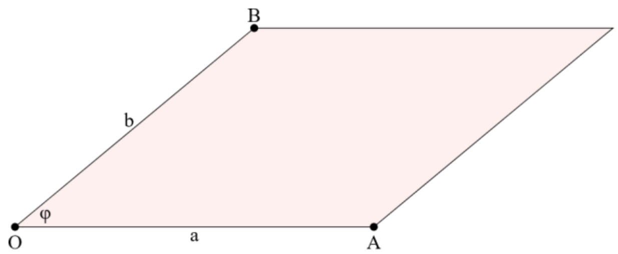
Man hat $\cos\varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{a \cdot b} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|}$, also $\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos\varphi}$.

Insbesondere gilt: $\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

Die Beziehung $\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos\varphi = a \cdot b \cdot \cos\varphi$ lässt sich als Projektionseigenschaft deuten.



Ein Weg zum Kreuzprodukt



... beginnt mit der Frage nach dem **Flächeninhalt** des von den Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ aufgespannten Parallelogramms.

Wieder sei $\vec{A} := \overrightarrow{OA}$ usw.; ferner $a := \left|\overline{OA}\right|$ usw.

sowie $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ usw.

Im **Zwei**dimensionalen hat man $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $\left|\vec{A}\right| = a$ usw.. Der gesuchte Flächeninhalt ist $F = a \cdot b \cdot \sin\varphi$. Damit ist

$$F^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot \left(1 - \cos^2\varphi\right) = \left(a_1^2 + a_2^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2\right) - \left(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2\right)^2 = \left(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\right)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

als Determinantenquadrat.

Im **Drei**dimensionalen hat man $\vec{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ mit $\left|\vec{A}\right|=a$ usw. Der gesuchte Flächeninhalt ist wieder $F=a\cdot b\cdot \sin\varphi$. Damit ist

$$\begin{aligned} F^2 &= a^2\cdot b^2\cdot\left(1-\cos^2\varphi\right)=\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\cdot\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-\left(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3\right)^2 \\ &= \left(a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\right)^2+\left(a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\right)^2+\left(a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\right)^2 \\ &= \begin{pmatrix} a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1 \\ a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}^2 \end{aligned}$$

Nur der zweite Vektor $\begin{pmatrix} a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenschaft, auf $\vec{A}$ und auf $\vec{B}$ senkrecht zu stehen und mit $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ein Rechtssystem zu bilden, und bekommt daher den Namen Vektor- oder Kreuzprodukt $\boxed{\begin{pmatrix} a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2 \\ a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3 \\ a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1 \end{pmatrix}=:\vec{A}\times\vec{B}}$. Dann ist $\boxed{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right)}$ (man beachte, dass links kein Vektor steht).

Ein alternativer Weg besteht darin, über ein LGS Vektoren ausrechnen, die auf $\vec{A}$ und auf $\vec{B}$ senkrecht stehen, hat dann jedoch nicht den Bezug zum Flächeninhalt.

Für $\vec{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}+a_3\cdot\vec{k}$ usw. mit den orthonormalen Basisvektoren $\vec{i}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist das Kreuzprodukt die Determinante $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.