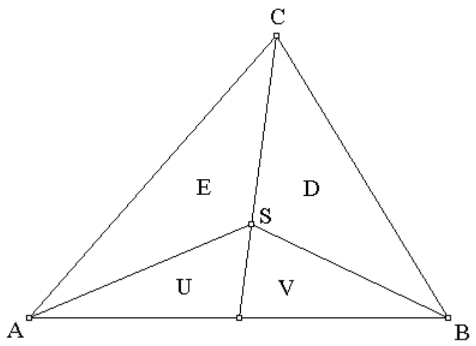
Zur Kopunktalität der Seitenhalbierenden[1]

Daß sich die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, wird auf möglicherweise neue, auf jeden Fall symmetrische Art bewiesen. Als Folgerung erhält man leicht die Teilungseigenschaft des Schwerpunkts; als Anschlußüberlegung den Satz von Ceva.

Wohl in jedem Bundesland wird bewiesen, daß sich in einem Dreieck die drei Mittelsenkrechten, die drei Winkelhalbierenden und die drei Seitenhalbierenden jeweils in einem Punkt schneiden. Während die Beweise für die Mittelsenkrechten und für die Winkelhalbierenden dieselbe Struktur haben, wird immer wieder behauptet, daß man bei den Seitenhalbierenden vollkommen anders vorgehen müsse. Ziel dieser Note ist es, zu zeigen, daß man auch die Seitenhalbierenden weitgehend nach der erwähnten Struktur behandeln kann (allerdings wohl nicht als Ortslinien). Die einzige Voraussetzung für den Beweis ist, daß man den Flächeninhalt des Dreiecks kennt.

1. Erste Vorüberlegung:

Wir zeichnen die Seitenhalbierende zur Seite c. S sei irgendein Punkt darauf:

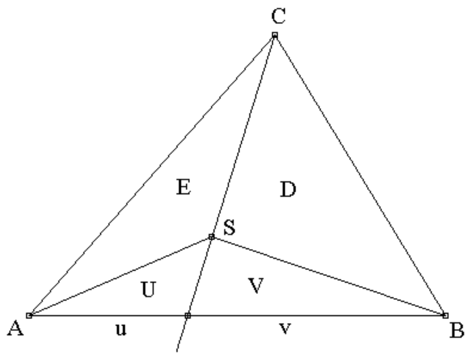


Wir zerlegen das Ausgangsdreieck ABC in 4 Teildreiecke mit den Flächeninhalten U, V, E, D.

Nun ist $U = V$, da die zugehörigen Dreiecke die gleiche Höhe haben. Aus demselben Grund ist $E + U = D + V$. Also ist $D = E$.

2. Zweite Vorüberlegung:

Wir zeichnen irgendeine Ecktransversale durch C, die die Seite c im Verhältnis $u : v$ teilt. S sei irgendein Punkt darauf:



Dann gilt $\frac{u}{v} = \frac{U}{V} = \frac{E+U}{D+V} = \frac{E}{D}$. (Die letzte Gleichung ergibt sich, wenn man kreuzweise multipliziert und dann vereinfacht.)

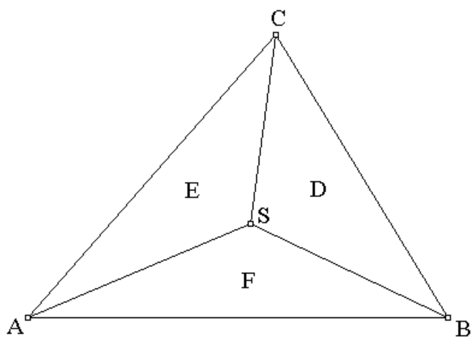
[1] Erschien in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **50** (6), S. 339 - 340 (1997).

3. Charakterisierung der Seitenhalbierenden

Die Ecktransversale durch C ist genau dann Seitenhalbierende, wenn für jeden Punkt S auf ihr gilt, daß die Dreiecke ASC und SBC den gleichen Flächeninhalt haben.
Analog charakterisiert man die Seitenhalbierenden durch A und durch B.

4. Beweis der Kopunktalität

Die zwei Seitenhalbierenden s_a und s_c schneiden sich im Punkt S. Wir müssen beweisen, daß BS die Seite b im Verhältnis 1 : 1 teilt.



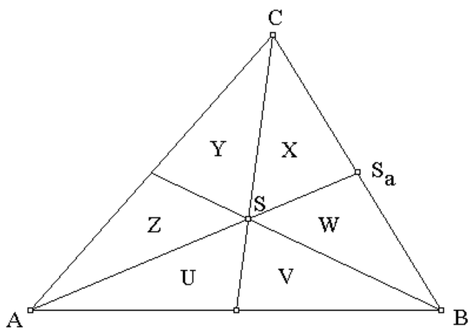
S liegt auf s_c. Also ist $E = D$.

S liegt auf s_a. Also ist $E = F$.

Somit ist $D = F$, und deshalb liegt S auf s_b.

5. Zum Teilungsverhältnis

Bekanntlich teilt S jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2 : 1. Das ist einfach zu sehen:

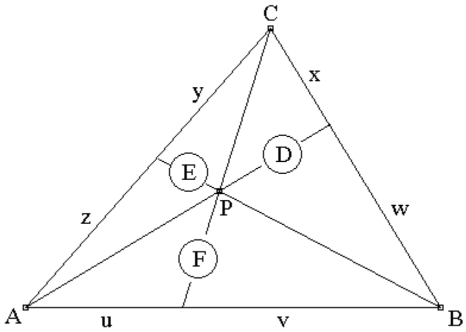


Die Flächeninhalte D, E, F sind alle gleich groß. Daher sind auch die Flächeninhalte U, V, ..., Z alle gleich groß.

Betrachten wir etwa das Teildreieck ABS_a. Es besteht aus den Teildreiecken ABS und SBS_a, die beide dieselbe Höhe haben. Da die Fläche von ABS doppelt so groß wie die Fläche von SBS_a ist, ist daher auch die Grundseite AS von ABS doppelt so lang wie die Grundseite SS_a von SBS_a.

6. Erweiterung: Der Satz von Ceva

Was ändert sich, wenn man keine Seitenhalbierenden, sondern Transversalen nimmt, die die gegenüber liegende Seite in irgend einem anderen Verhältnis teilen?



P liegt genau dann auf der Transversalen durch C, wenn $\frac{E}{D} = \frac{u}{v}$ ist.

P liegt genau dann auf der Transversalen durch A, wenn $\frac{F}{E} = \frac{w}{x}$ ist.

P liegt genau dann auf der Transversalen durch B, wenn $\frac{D}{F} = \frac{y}{z}$ ist.

Diese 3 Gleichungen sind genau dann miteinander verträglich, wenn $\frac{u}{v} \cdot \frac{w}{x} \cdot \frac{y}{z} = 1$ ist.

Dies ist die Aussage des Satzes von Ceva.