Dr. Jörg Meyer, Hameln

Zur Symmetrie der Graphen von Polynomfunktionen

Vorbemerkung

Jedes Polynom $f(x)=x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+...+a_1\cdot x+a_0$ vom Grad n kann durch die Verschiebung $x=z-\frac{a_{n-1}}{n}$ in Richtung der Rechtsachse auf die Form $g(z)=z^n+b_{n-2}\cdot z^{n-2}+...+b_1\cdot z+b_0$ und nach einer weiteren Verschiebung in Richtung der Hochachse auf die Form $h(z)=z^n+b_{n-2}\cdot z^{n-2}+...+b_1\cdot z$ gebracht werden.

Polynome vom Grad 2

haben die Form $h(z)=z^2$, und ihre Graphen sind symmetrisch bzgl. der *Achsenspiegelung* an der Hochachse.

Polynome vom Grad 3

haben die Form $h(z)=z^3+b_1\cdot z$, und ihre Graphen sind syymmetrisch bzgl. der *Punktspiegelung* am Ursprung.

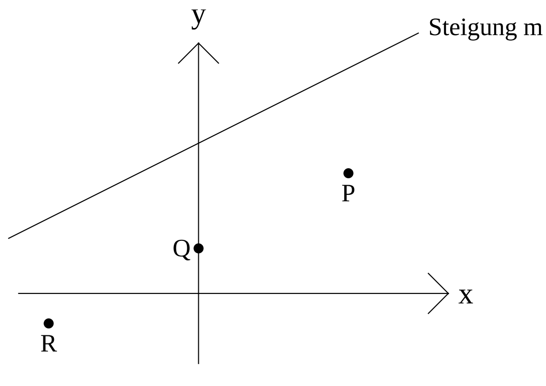
Polynome vom Grad 4

haben die Form $h(z)=z^4+b_2\cdot z^2+b_1\cdot z$. Ihre Graphen sind symmetrisch bzgl. der *Schrägspiegelung* mit der Hochachse als Spiegelachse und der Spiegelungsrichtung b_1.

Bei einer Schrägspiegelung wird der Punkt $P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ wie folgt abgebildet: Man legt eine Gerade durch P mit der Steigung m; sie hat die Gleichung $y=m\cdot(x-u)+v$ und schneidet die Hochachse in $Q=\begin{pmatrix}0\\v-m\cdot u\end{pmatrix}$.

Spiegelt man P an Q, erhält man den Punkt $R=2\cdot Q-P=\begin{pmatrix}-u\\v-2\cdot m\cdot u\end{pmatrix}$ als Resultat der Schrägspiegelung.

Achtung: Die Schrägspiegelung ist *keine* Kongruenzabbildung!



Insbesondere wird der allgemeine Punkt

$$P=\begin{pmatrix} z \\ h(z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ z^4+b_2\cdot z^2+b_1\cdot z \end{pmatrix}$$ des Graphen

einer Polynomfunktion vom Grad 4 abgebildet

auf $R=\begin{pmatrix} -z \\ z^4+b_2\cdot z^2-b_1\cdot z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -z \\ h(-z) \end{pmatrix}$.

Die Richtung der Schrägspiegelung ist die Richtung der Tangente an der Stelle 0.