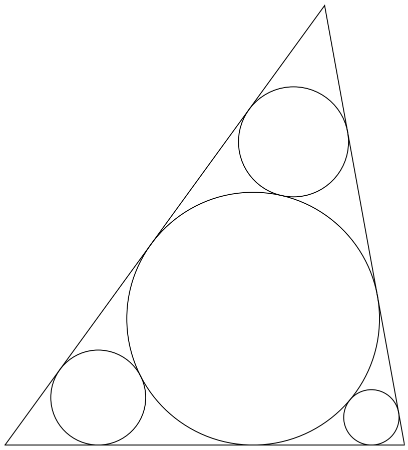
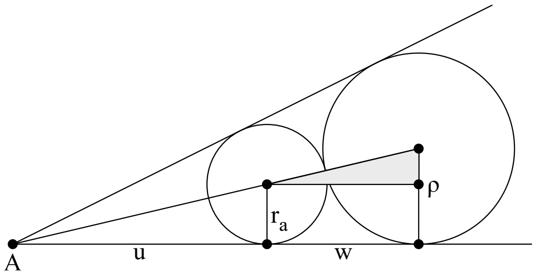
Jörg MEYER, Hameln 11. 2. 2022

Drei Kreise an den Inkreis

An den Inkreis mit Radius ρ werden drei berührende Kreise gezeichnet.





Im getönten Dreieck ist $(r_a+\rho)^2 = w^2 + (\rho - r_a)^2$

und damit $4\cdot\rho\cdot r_a = w^2$.

Mit $u+v = s_a = \dfrac{b+c-a}{2}$ ist $\dfrac{r_a}{u} = \dfrac{\rho}{s_a} = \tan\dfrac{\alpha}{2} =: m_a$.

Damit ist $4\cdot\rho\cdot r_a = (s_a-u)^2 = \left(\dfrac{\rho}{m_a} - \dfrac{r_a}{m_a}\right)^2 = \dfrac{1}{m_a^2}\cdot(\rho - r_a)^2$ mit der Lösung $r_a = \rho\cdot\left(m_a \pm \sqrt{1+m_a^2}\right)^2$.

Da r_a kleiner sein muss als ρ, ist das negative Zeichen zu nehmen. Dann ist

$$r_a = \rho\cdot\left(\tan\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Die Umkehrungen $\sin x + \sin y = 2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$ der Additionstheoreme führen zu

$$r_a = \rho\cdot\frac{\sin 90^\circ - \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin 90^\circ + \sin\frac{\alpha}{2}} = \rho\cdot\frac{\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)} = \rho\cdot\frac{\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)} = \boxed{\rho\cdot\tan^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right) = r_a}.$$

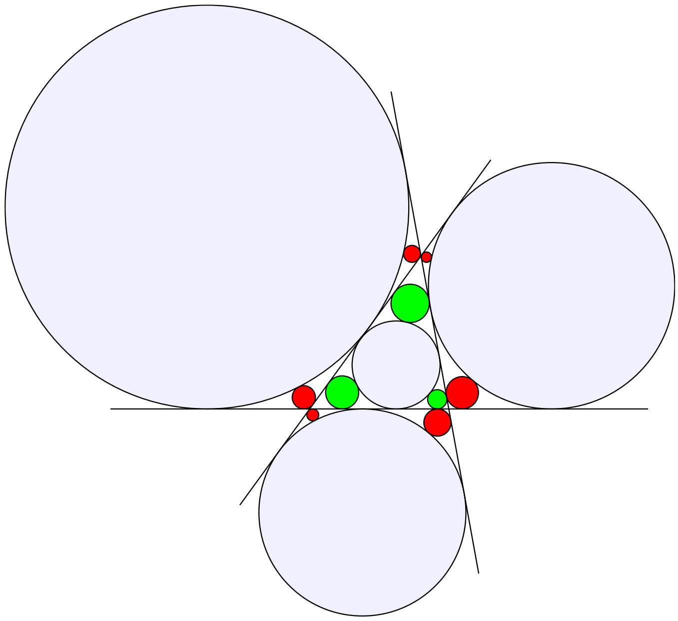
Mit $\sigma := \tan\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)$; $\tau := \tan\left(\dfrac{\beta}{4}\right)$ ist

$$\tan\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1-\sigma}{1+\sigma};\quad \tan\left(45^\circ-\frac{\beta}{4}\right) = \frac{1-\tau}{1+\tau}$$

$$\tan\left(45^\circ-\frac{\gamma}{4}\right) = \tan\left(45^\circ - \frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{4}\right) = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right) = \frac{\sigma+\tau}{1-\sigma\cdot\tau}$$

und wegen $\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma}\cdot\dfrac{1-\tau}{1+\tau} + \dfrac{1-\tau}{1+\tau}\cdot\dfrac{\sigma+\tau}{1-\sigma\cdot\tau} + \dfrac{\sigma+\tau}{1-\sigma\cdot\tau}\cdot\dfrac{1-\sigma}{1+\sigma} = 1$ besteht die unerwartete Beziehung

$$\boxed{\sqrt{r_a\cdot r_b} + \sqrt{r_b\cdot r_c} + \sqrt{r_c\cdot r_a} = \rho}.$$



Mutatis mutandis lässt sich die obige Formel für r_a auch verwenden, um die Radien der roten Kreise an den Ankreisen zu ermitteln.