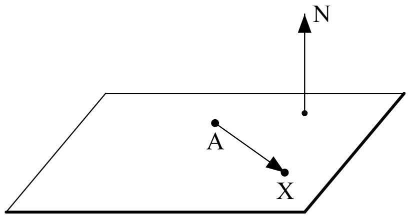
Jörg MEYER, Hameln

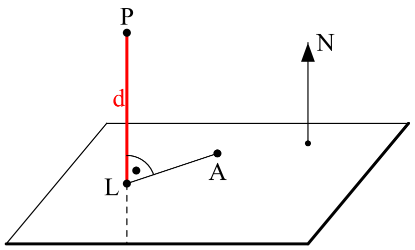
Abstände in der Raumgeometrie

Abstand Punkt/Ebene

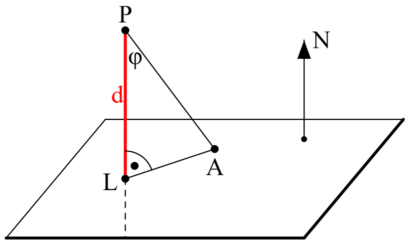


Die Ebene habe den **normierten** Normalenvektor N und gehe durch den Punkt A.
Für jeden anderen Punkt X auf der Ebene gilt, dass $(X-A)\cdot N=0$ ist. Damit hat man die Normalenform der Ebenengleichung: $X\cdot N=A\cdot N$.

Um den Abstand d eines Punktes P von der Ebene zu ermitteln, gibt es mehrere Wege:



Weg 1: Die zu E senkrechte Lotgerade durch P hat den allgemeinen Punkt $X(\lambda)=P+\lambda\cdot N$ und schneidet die Ebene E für $\lambda=(A-P)\cdot N$ im Lotfußpunkt $L=P+((A-P)\cdot N)\cdot N$, woraus $d=|L-P|=\boxed{|(A-P)\cdot N|=d}$ folgt.



Weg 2: Das Dreieck LAP ist rechtwinklig mit $\cos\varphi=\frac{d}{|P-A|}$.

Das Skalarprodukt $(P-A)\cdot N=|P-A|\cdot|N|\cdot\cos\varphi=d\cdot|N|$ liefert $\boxed{d=|(P-A)\cdot N|}$.

Ist P der Ursprung, so ist $d=|A\cdot N|$.

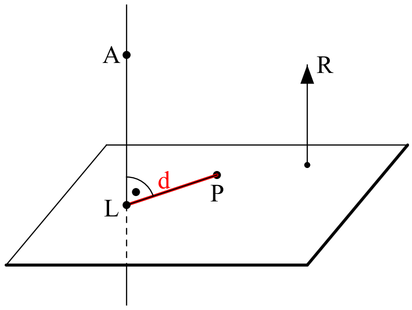
$\boxed{\text{Hat die Ebene die Gleichung } X\cdot N=e\text{, so ist } |e| \text{ der Abstand zum Ursprung.}}$

Der Lotfußpunkt L_O des Ursprungs auf die Ebene mit $X\cdot N=A\cdot N=e$ ist $L_O=(A\cdot N)\cdot N=\boxed{e\cdot N=L_O}$.

Abstand Punkt/Raumgerade

Die Raumgerade g mit dem speziellen Punkt A und dem **normierten** Richtungsvektor R hat den allgemeinen Punkt $X=A+\lambda\cdot R$. Bildet man das Kreuzprodukt mit R, bekommt man die Plücker-Form $X\times R=A\times R$.

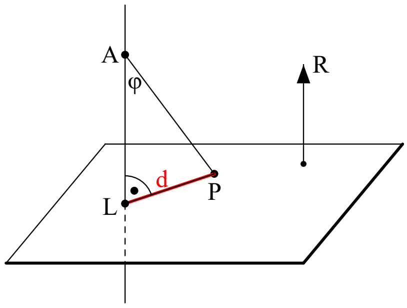
Um den Abstand d eines Punktes P von der Raumgeraden g zu ermitteln, gibt es mehrere Wege:



Weg 1: Die zu g senkrechte Ebene durch P hat die Gleichung $X\cdot R=P\cdot R$; sie schneidet $g: X=A+\lambda\cdot R$ für $\lambda=(P-A)\cdot R$ im Lotfußpunkt $L=A+((P-A)\cdot R)\cdot R$, woraus mit $D:=A-P$ schließlich $d=|L-P|=|D-(D\cdot R)\cdot R|$ folgt.

Weg 2: Der Lotfußpunkt $L = A + \lambda \cdot R$ auf g hat die Eigenschaft, dass $(L - P) \cdot R = 0$ ist, was wieder auf $\lambda = (P - A) \cdot R$ führt.

Weg 3: Der Lotfußpunkt $L = A + \lambda \cdot R$ auf g hat die Eigenschaft, zu P das kürzeste Abstandsquadrat $(L - P)^2 = (A - P + \lambda \cdot R)^2$ zu haben, was wieder auf $\lambda = (P - A) \cdot R$ führt.



Weg 4: Das Dreieck LPA ist rechtwinklig. Mit $\sin\varphi = \frac{d}{|A - P|}$ gilt für das Kreuzprodukt $|(A - P) \times R| = |A - P| \cdot \sin\varphi = d$ und deshalb mit $D = A - P$ schließlich $\boxed{d = |D \times R|}$.

Nun ist $d^2 = D^2 \cdot (1 - \cos^2 \varphi) = D^2 - (D \cdot R)^2$. Bei den ersten Wegen hatte man wegen $d^2 = D^2 - 2 \cdot (D \cdot R)^2 + (D \cdot R)^2 = D^2 - (D \cdot R)^2$ dasselbe Resultat.

Ist P der Ursprung, ist $d = |A \times R|$.

$$\boxed{\text{Hat die Raumgerade die Gleichung } X \times R = E \text{, so ist } |E| \text{ der Abstand zum Ursprung.}}$$

Der Lotfußpunkt L_O des Ursprungs auf die Gerade $g: X = A + \lambda \cdot R$ bzw. $X \times R = A \times R = E$ ist $L_O = A - (A \cdot R) \cdot R = R^2 \cdot A - (A \cdot R) \cdot R$.

Nun gibt es die GRAßMANN-Identität $U \times (V \times W) = (U \cdot W) \cdot V - (U \cdot V) \cdot W$, so dass sich der Lotfußpunkt des Ursprungs schreibt als $L_O = R \times (A \times R) = \boxed{R \times E = L_O}$.

Zusammenstellung

	Ebene durch A mit **normiertem** Normalenvektor N	Raumgerade durch A mit **normiertem** Richtungsvektor R
Gleichung	$X \cdot N = A \cdot N = e$	$X \times R = A \times R = E$
Abstand zum Ursprung	$\lvert e \rvert$	$\boxed{\lvert E \rvert}$
Lotfußpunkt des Ursprungs	$N \cdot e$	$R \times E$
Abstand zu P	$\lvert P \cdot N - e \rvert$	$\lvert P \times R - E \rvert$

Der Abstand zweier Raumgeraden

Die beiden Geraden mögen wieder die allgemeinen Punkte $X = A + \lambda \cdot R$ und $X = B + \mu \cdot S$ haben. Die Ebene mit $X = A + \lambda \cdot R + \mu \cdot S$ bzw. $X \cdot (R \times S) = A \cdot (R \times S)$ enthält die erste Gerade und ist parallel zur zweiten Gerade. Der gesuchte Abstand ist der Abstand zwischen B und dieser Ebene, also $\frac{|(B - A) \cdot (R \times S)|}{|R \times S|}$.