Potenzsummen[1]

Kurzfassung

Mehrere elementare Möglichkeiten zur Gewinnung(!) von Potenzsummenformeln werden erläutert. Dazu werden Induktions– und Differenzenmethoden verwendet, nicht aber analytische oder geometrische.

1. Einleitung

Potenzsummen sind Ausdrücke der Form

$$S^{(e)}(n) := 1^e + 2^e + \cdots n^e .$$

Aus Übungsbeispielen zur vollständigen Induktion werden die folgenden Formeln geläufig sein:

$$S^{(1)}(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) ,$$

$$S^{(2)}(n) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1) ,$$

$$S^{(3)}(n) = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot \left(n+1\right)^2 .$$

Dieser Beitrag beantwortet die Frage, wie man auf solche Formeln kommt. Dazu werden mehrere elementare (und unabhängig voneinander zu unterrichtende) Zugangsweisen (für allgemeine n und e) erläutert.

In den ersten beiden Abschnitten werden Rekursionsbeziehungen mit Hilfe von Induktionsargumenten entwickelt, die die Potenzsummen zu berechnen gestatten sowie einiges über ihre Struktur zu erkennen helfen. Im dritten Abschnitt wird dann ein die Methoden und Ergebnisse der ersten beiden Abschnitte vereinheitlichender Zugang dargestellt, der insbesondere einen einfachen Weg zu den Bernoullischen Zahlen bietet. So weit wird man mit Schülern nur in Ausnahmefällen kommen. Im letzten Abschnitt schließlich werden über Differenzenbeziehungen Zugänge zu den Potenzsummen gefunden, die man auch als problemorientierte Einführung in dieses Gebiet benutzen kann.

Analytische Methoden sollen in diesem Beitrag außer acht bleiben, und da in letzter Zeit geometrisch–kombinatorische Vorgehensweisen öfter in der Literatur behandelt wurden (z. B. [4], [7], [8]), soll auch auf sie hier nicht eingegangen werden. Interessiert man sich nur für den Fall $e = 2$, so sei auf [16] verwiesen, wo eine Fülle heuristischer Zugangsweisen präsentiert wird.

Natürlich ist nicht daran gedacht, das hier dargestellte Material in diesem Umfang Schülern zu präsentieren. Die folgenden Abschnitte verstehen sich vielmehr als Beitrag zum Hintergrundwissen des Lehrers, der sich in der Praxis für einen Weg entscheiden wird.

2. Vollständige Induktion über n

Die Ansicht, daß man beim Beweisverfahren der vollständigen Induktion die zu beweisende Behauptung vorher kennen müsse, ist zwar weit verbreitet, aber falsch.

Im folgenden wird gezeigt, daß man durch vollständige Induktion die Potenzssummenformeln auch erhalten (und damit gleichzeitig beweisen) kann (vgl. auch [14]).

2.1 Einführendes Beispiel

Um zunächst mit einem konkreten Beispiel zu beginnen, sei $e = 3$. Die einzige Vermutung, die man haben muß, ist, daß $S^{(3)}(n)$ ein Polynom 4. Grades in n ist:

$$S^{(3)}(n) = a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + a_3 \cdot n^3 + a_4 \cdot n^4 .$$

---

[1] Leicht korrigierte Fassung. Der Originalaufsatz erschien in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **46**(3), S. 131 – 138 (April 1993).

Die Koeffizienten werden so bestimmt, daß die vollständige Induktion über n durchführbar ist. Das heißt im einzelnen:

Die Induktionsverankerung ($n = 0$) muß stimmen. Wegen $S^{(3)}(0) = 0$ folgt daraus $a_0 = 0$.

Der Induktionsschritt ($n \to n+1$) muß gemacht werden können. Das bedeutet:

$$
\begin{aligned}
&1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= a_0 + a_1 \cdot n + a_2 \cdot n^2 + a_3 \cdot n^3 + a_4 \cdot n^4 + (n+1)^3 \qquad \text{(Ind.–Vor.)} \\
&= a_0 + a_1 \cdot (n+1) + a_2 \cdot (n+1)^2 + a_3 \cdot (n+1)^3 + a_4 \cdot (n+1)^4.
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung der binomischen Formeln (und der Tatsache, daß $a_0 = 0$) führt ein Koeffizientenvergleich auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 \qquad (\text{Koeff. bei } n^0), \\
2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + 4 \cdot a_4 &= 3 \qquad (\text{Koeff. bei } n^1), \\
3 \cdot a_3 + 6 \cdot a_4 &= 3 \qquad (\text{Koeff. bei } n^2), \\
4 \cdot a_4 &= 1 \qquad (\text{Koeff. bei } n^3), \\
a_4 &= a_4 \qquad (\text{Koeff. bei } n^4).
\end{aligned}
$$

Von unten nach oben ergeben sich die Lösungen:

$$
a_4 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_1 = 0,
$$

so daß

$$
S^{(3)}(n) = \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2
$$

ist. Dies ist die in der Einleitung angegebene Formel in ausmultiplizierter Gestalt.

2.2 Allgemeine Durchführung

Die prinzipielle Verallgemeinerbarkeit dieser Vorgehensweise ist evident. Man setzt $S^{(e)}(n)$ als Polynom in n vom Grad $e+1$ an und schreibt

$$
\begin{aligned}
S^{(e)}(n) &= \sum_{i=1}^{n} i^e \\
&= a_0^{(e)} + a_1^{(e)} \cdot n + a_2^{(e)} \cdot n^2 + \cdots + a_{e+1}^{(e)} \cdot n^{e+1}.
\end{aligned}
$$

Wie oben folgt aus der Induktionsverankerung, daß $a_0^{(e)} = 0$ ist.
Verfolgt man nun den Ansatz

$$
S^{(e)}(n) = \sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot n^j \tag{1}
$$

für $e = 4, \cdots, 7$ weiter, so erhält man:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrr}
S^{(0)}(n) = & & & & & & & & n \\
S^{(1)}(n) = & & & & & & & \frac{1}{2}\cdot n^2 & +\frac{1}{2}\cdot n \\
S^{(2)}(n) = & & & & & & \frac{1}{3}\cdot n^3 & +\frac{1}{2}\cdot n^2 & +\frac{1}{6}\cdot n \\
S^{(3)}(n) = & & & & & \frac{1}{4}\cdot n^4 & +\frac{1}{2}\cdot n^3 & +\frac{1}{4}\cdot n^2 & +0\cdot n \\
S^{(4)}(n) = & & & & \frac{1}{5}\cdot n^5 & +\frac{1}{2}\cdot n^4 & +\frac{1}{3}\cdot n^3 & +0\cdot n^2 & -\frac{1}{30}\cdot n \\
S^{(5)}(n) = & & & \frac{1}{6}\cdot n^6 & +\frac{1}{2}\cdot n^5 & +\frac{5}{12}\cdot n^4 & +0\cdot n^3 & -\frac{1}{12}\cdot n^2 & +0\cdot n \\
S^{(6)}(n) = & & \frac{1}{7}\cdot n^7 & +\frac{1}{2}\cdot n^6 & +\frac{1}{2}\cdot n^5 & +0\cdot n^4 & -\frac{1}{6}\cdot n^3 & +0\cdot n^2 & +\frac{1}{42}\cdot n \\
S^{(7)}(n) = & \frac{1}{8}\cdot n^8 & +\frac{1}{2}\cdot n^7 & +\frac{7}{12}\cdot n^6 & +0\cdot n^5 & -\frac{7}{24}\cdot n^4 & +0\cdot n^3 & +\frac{1}{12}\cdot n^2 & +0\cdot n
\end{array}
$$

Es ist auffällig, daß der höchste Koeffizient den Wert $\frac{1}{e+1}$ hat, der zweithöchste Koeffizient den Wert $\frac{1}{2}$ hat und manche der Koeffizienten verschwinden.

(Bemerkt man zusätzlich Zusammenhänge zwischen diagonal liegenden Koeffizienten, würde sich evtl. eine weitere Vorgehensweise nach [13] empfehlen; zu den dort angegebenen Resultaten wird hier ein anderer Weg eingeschlagen werden.)

Hier ist man nun an einer Stelle, an der eine abstraktere Ebene hilfreich ist: Wenn man den Ansatz (1) allgemein weiter verfolgt, gewinnt man ja vielleicht mehr Aufschluß über die Natur dieser merkwürdigen Koeffizienten!

Da die Induktionsverankerung (d.h. $a_0^{(e)} = 0$) schon verarbeitet wurde, muß noch der Induktionsschritt berücksichtigt werden. Nach Induktionsvoraussetzung gelte (1) mit zunächst noch unbekannten $a_j^{(e)}$. Daraus soll nun

$$S^{(e)}(n+1) = \sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot (n+1)^j$$

folgen, wobei der Schritt von n auf n+1 mit Hilfe der einfachen Rekursionsgleichung

$$S^{(e)}(n+1) = S^{(e)}(n) + (n+1)^e \tag{2}$$

getan wird. Daß also der Induktionsschritt vollführt werden kann, ist gleichbedeutend damit, daß die Koeffizienten $a_j^{(e)}$ so bestimmt werden, daß die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot (n+1)^j = \sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot n^j + (n+1)^e \tag{3}$$

erfüllt ist. Hieraus lassen sich die $a_j^{(e)}$ aber durch Koeffizientenvergleich ermitteln.

Damit ist der Kern der Vorgehensweise noch einmal deutlich gemacht: (2) zusammen mit (1) liefert die gesuchten $a_j^{(e)}$.

Führt man dies Programm allgemein durch, so besteht die einzige Klippe in der Berechnung der linken Seite von (3).

Es ist

$$\sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot (n+1)^j = \sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \cdot n^i \ ,$$

und der letzte Ausdruck muß nach Potenzen von n geordnet werden. Bei Unvertrautheit mit dem Summenzeichen empfiehlt sich ein ausführliches Hinschreiben:

$$\cdots = a_1^{(e)} \cdot \left[\binom{1}{0} \cdot n^0 + \binom{1}{1} \cdot n^1 \right]$$
$$+ a_2^{(e)} \cdot \left[\binom{2}{0} \cdot n^0 + \binom{2}{1} \cdot n^1 + \binom{2}{2} \cdot n^2 \right]$$
$$+ \cdots$$
$$+ a_{e+1}^{(e)} \cdot \left[\binom{e+1}{0} \cdot n^0 + \binom{e+1}{1} \cdot n^1 + \cdots + \binom{e+1}{e+1} \cdot n^{e+1} \right].$$

Durch Umordnen folgt:

$$\cdots = n^0 \cdot \left[a_1^{(e)} \cdot \binom{1}{0} + a_2^{(e)} \cdot \binom{2}{0} + \cdots + a_{e+1}^{(e)} \cdot \binom{e+1}{0} \right]$$
$$+ n^1 \cdot \left[a_1^{(e)} \cdot \binom{1}{1} + a_2^{(e)} \cdot \binom{2}{1} + \cdots + a_{e+1}^{(e)} \cdot \binom{e+1}{1} \right]$$
$$+ n^2 \cdot \left[\qquad a_2^{(e)} \cdot \binom{2}{2} + \cdots + a_{e+1}^{(e)} \cdot \binom{e+1}{2} \right]$$
$$+ \cdots$$
$$+ n^{e+1} \cdot \left[\qquad\qquad a_{e+1}^{(e)} \cdot \binom{e+1}{e+1} \right]$$
$$= \sum_{k=0}^{e+1} \sum_{j=k}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot \binom{j}{k} \cdot n^k,$$

wobei für die letzte Gleichung $a_0^{(e)} = 0$ benutzt wurde.

Nun ist das einen Koeffizientenvergleich ermöglichende Resultat gewonnen, indem man in (3) die linke Seite gemäß der soeben durchgeführten Umformung durch die angegebene Summe ersetzt und bei der rechten Seite von (3) die Summationsvariable ändert sowie die binomische Formel anwendet:

$$\sum_{k=0}^{e+1} \sum_{j=k}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot \binom{j}{k} \cdot n^k = \sum_{k=1}^{e+1} a_k^{(e)} \cdot n^k + \sum_{k=0}^{e} \binom{e}{k} \cdot n^k .$$

Es gilt für

$$k = 0: \qquad \sum_{j=0}^{e+1} a_j^{(e)} = 1,$$

$$k = 1, \cdots, e: \qquad \sum_{j=k}^{e+1} \binom{j}{k} \cdot a_j^{(e)} = a_k^{(e)} + \binom{e}{k},$$

$$k = e+1: \qquad a_{e+1}^{(e)} = a_{e+1}^{(e)}.$$

Dies alles läßt sich zu der (leicht umformulierten) Rekursionsgleichung für die $a_j^{(e)}$ zusammenfassen:

$$\text{Für } k = 0, \cdots, e \text{ gilt: } \sum_{j=k+1}^{e+1} \binom{j}{k} \cdot a_j^{(e)} = \binom{e}{k}. \tag{4}$$

Das sind e+1 Gleichungen für $a_1^{(e)}, \cdots, a_{e+1}^{(e)}$.
Setzt man nacheinander $k = e,\ e-1,\ e-2,\ \cdots$ ein, so erhält man:

$$a_{e+1}^{(e)} = \frac{1}{e+1}; \quad a_e^{(e)} = \frac{1}{2}; \quad a_{e-1}^{(e)} = \frac{e}{12}; \quad a_{e-2}^{(e)} = 0;$$
$$a_{e-3}^{(e)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{30}\cdot\binom{e}{3}; \quad a_{e-4}^{(e)} = 0; \quad a_{e-5}^{(e)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{42}\cdot\binom{e}{5}; \cdots \tag{5}$$

2.3 Ein anderer Ansatz

Will man sich über (4) weiterführende Gedanken machen, wird man vielleicht eine kompaktere Schreibweise anstreben.

Auf eine solche wird man geführt, wenn man $S^{(e)}(n)$ nicht als Polynom in n, sondern als Polynom in n+1 schreibt:

$$S^{(e)}(n) = \sum_{j=1}^{e+1} b_j^{(e)} \cdot (n+1)^j . \tag{6}$$

Beispiele:

$$S^{(1)}(n) = \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2 - (n+1) ,$$

$$S^{(2)}(n) = \frac{1}{3}\cdot(n+1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2 + \frac{1}{4}\cdot(n+1) ,$$

$$S^{(3)}(n) = \frac{1}{4}\cdot(n+1)^4 - \frac{1}{2}\cdot(n+1)^3 + \frac{1}{4}\cdot(n+1)^2 .$$

Für eine einfache Umrechnung der $a_j^{(e)}$ und $b_j^{(e)}$ läßt sich die Beziehung (2) verwenden:

$$S^{(e)}(n+1) = S^{(e)}(n) + (n+1)^e ,$$

also wegen (1) und (6):

$$\sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot (n+1)^j = \sum_{j=1}^{e+1} b_j^{(e)} \cdot (n+1)^j + (n+1)^e .$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$b_j^{(e)} = a_j^{(e)} \text{ für } j \neq e \text{ und } b_e^{(e)} = a_e^{(e)} - 1 . \tag{7}$$

Die Beziehungen (4) lassen sich nun schreiben als:

$$\text{Für } k = 0, \cdots, e-1 \text{ gilt: } \sum_{j=k+1}^{e+1} \binom{j}{k} \cdot b_j^{(e)} = 0 . \tag{8}$$

(Man sieht leicht, daß (8) für $k = e$ falsch ist.)

2.4 Symmetrieeigenschaften

Es fällt auf, daß

$$a_{e-2\cdot i}^{(e)} = 0 \text{ für } i \geq 1 \tag{9}$$

ist.

Der Grund hierfür liegt darin, daß die $S^{(e)}$ Symmetrieeigenschaften haben, die allerdings nicht deutlich werden, wenn man den in natürlicher Weise gegebenen Definitionsbereich für die $S^{(e)}$ (nämlich **N**) beibehält. Erweitert man dagegen die Beziehung (2) auf ganzzahlige n, so folgt mit

$$S^{(e)}(n) = S^{(e)}(n+1) - (n+1)^e \,, \tag{10}$$

daß

$$S^{(e)}(-1) = S^{(e)}(0) - 0^e = 0$$

$$S^{(e)}(-2) = S^{(e)}(-1) - (-1)^e = (-1)^{e+1} \cdot 1^e$$

$$S^{(e)}(-3) = S^{(e)}(-2) - (-2)^e = (-1)^{e+1} \cdot \left(1^e + 2^e\right)$$

und allgemein

$$S^{(e)}(-n-1) = (-1)^{e+1} \cdot S^{(e)}(n) \,.$$

Nun wurde bei der Bestimmung der Koeffizienten $a_j^{(e)}$ in (1) nur gebraucht, daß $S^{(e)}(0) = 0$ ist und (2) gilt, nicht aber, daß n positiv sein müsse. Der Induktionsbeweis funktioniert also auch für negative n und liefert natürlich dieselben $a_j^{(e)}$, da man statt (2) die dazu äquivalente Beziehung (10) benutzt. Mithin ist (1) mit den Koeffizienten nach (4) für alle ganzzahligen n richtig.

Das Verschwinden der $a_{e-2\cdot i}^{(e)}$ für $i \geq 1$ ist nun wegen

$$S^{(e)}(-n-1) = \sum_{j=1}^{e-1} a_j^{(e)} \cdot (-1)^j \cdot (n+1)^j + \frac{(-1)^e}{2} \cdot (n+1)^e + \frac{(-1)^{e+1}}{e+1} \cdot (n+1)^{e+1}$$

und

$$\begin{aligned}(-1)^{e+1} \cdot S^{(e)}(n) &= (-1)^{e+1} \cdot \sum_{j=1}^{e+1} b_j^{(e)} \cdot (n+1)^j \\ &= \sum_{j=1}^{e-1} a_j^{(e)} (-1)^{e+1} \cdot (n+1)^j - \frac{(-1)^e}{2} \cdot (n+1)^e + \frac{(-1)^{e+1}}{e+1} \cdot (n+1)^{e+1}\end{aligned}$$

eine leichte Übungsaufgabe.

3. Vollständige Induktion über e

Eine methodische Aufbereitung ist in [9] beschrieben; sie sei hier kurz für den Fall $e = 3$ erläutert:
Zwar läßt sich i^3 nicht durch i^2, i und 1 ausdrücken, wohl aber ist

$$(i+1)^4 - i^4 = 4 \cdot i^3 + 6 \cdot i^2 + 4 \cdot i + 1 \,.$$

Summiert man diese Gleichungen für $i = 1, \cdots, n$, so erhält man

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4 \cdot S^{(3)}(n) + 6 \cdot S^{(2)}(n) + 4 \cdot S^{(1)}(n) + n \,.$$

$S^{(3)}(n)$ läßt sich also durch $S^{(2)}(n)$, $S^{(1)}(n)$ und Potenzen von n ausdrücken; nach leichter Rechnung bekommt man die in der Einleitung angegebene Formel für $S^{(3)}(n)$ heraus.
Auch hier ist die prinzipielle Verallgemeinerbarkeit dieser Vorgehensweise evident. Es handelt sich um Induktion über den Exponenten, und eine zugehörige Rekursionsformel für die Potenzsummen erhält man folgendermaßen:

Es ist

$$(i+1)^{e+1} - i^{e+1} = \sum_{k=0}^{e} \binom{e+1}{k} \cdot i^k ,$$

also nach Summation

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^{e+1} - i^{e+1}\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{e} \binom{e+1}{k} \cdot i^k .$$

Somit gilt die <u>Rekursionsgleichung</u> für die $S^{(k)}(n)$:

$$(n+1)^{e+1} - 1 = \sum_{k=0}^{e} \binom{e+1}{k} \cdot S^{(k)}(n) . \tag{11}$$

(Dabei ist $S^{(0)}(n) = n$ für $n > 0$).

Schreibt man wie in Abschnitt 2.2

$$S^{(e)}(n) = \sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot n^j , \tag{1}$$

so folgt aus (11) für die Koeffizienten $a_j^{(e)}$:

$$\sum_{j=1}^{e+1} \binom{e+1}{j} \cdot n^j = \sum_{k=0}^{e} \binom{e+1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{k+1} a_j^{(k)} \cdot n^j .$$

Wird die letztere Summe wieder nach Potenzen von n geordnet, so folgt

$$\cdots = \sum_{j=1}^{e+1} \sum_{i=j-1}^{e} \binom{e+1}{i} \cdot a_j^{(i)} \cdot n^j ,$$

und der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\text{Für } j = 1, \cdots, e+1 \text{ gilt: } \sum_{i=j-1}^{e} \binom{e+1}{i} \cdot a_j^{(i)} = \binom{e+1}{j} . \tag{12}$$

Setzt man nacheinander $j = e+1,\ e,\ e-1, \cdots$ ein, so erhält man auch hier wie in Abschnitt 2.2 die Formeln (5).
Der Aufwand, (12) zu gewinnen und zur Berechnung der $a_j^{(e)}$ zu benutzen, ist mit demjenigen bzgl. (4) vergleichbar. Allerdings ist die Rekursionsbeziehung (12) ganz anderer Art als (4), da hier die $a_j^{(e)}$ zu verschiedenen Exponenten e in Beziehung gesetzt werden. Der gemeinsame Kern von (4) und (12) wird im folgenden Abschnitt 4 dargestellt.
Es sei noch erwähnt, daß sich auch (12) mit Hilfe von (7) kompakter schreiben läßt:

$$\text{Für } j = 1, \cdots, e \text{ gilt: } \sum_{i=j-1}^{e} \binom{e+1}{i} \cdot b_j^{(i)} = 0 . \tag{13}$$

4. Ein direkter Weg zu den Bernoullischen Zahlen

Die in den Abschnitten 2 und 3 erhaltenen Rekursionsbeziehungen lassen sich auch einheitlich aus einer Funktionalgleichung für die $S^{(e)}(n)$ gewinnen, die wohl Snow ([10]) als erster bemerkt hat:

4.1 Die allgemeine Rekursionsbeziehung

Es ist

$$\begin{aligned} S^{(e)}(n+m) &= S^{(e)}(n) + \sum_{i=1}^{m} (n+i)^e \\ &= S^{(e)}(n) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{e} \binom{e}{j} \cdot n^j \cdot i^{e-j} \\ &= S^{(e)}(n) + \sum_{j=0}^{e} \binom{e}{j} \cdot n^j \cdot S^{(e-j)}(m), \end{aligned}$$

also

$$S^{(e)}(n+m) = S^{(e)}(n) + S^{(e)}(m) + \sum_{j=1}^{e} \binom{e}{j} \cdot n^j \cdot S^{(e-j)}(m) \,. \tag{14}$$

Für $m = 1$ heißt das:

$$\begin{aligned} S^{(e)}(n+1) &= S^{(e)}(n) + 1 + \sum_{j=1}^{e} \binom{e}{j} \cdot n^j \\ &= S^{(e)}(n) + (n+1)^e, \end{aligned}$$

und das ist die Formel (2), aus der durch Koeffizientenvergleich (4) folgt.
Setzt man hingegen $n = 1$ in die Formel (14) ein, dann ist

$$S^{(e)}(1+m) = 1 + S^{(e)}(m) + \sum_{j=1}^{e} \binom{e}{j} \cdot S^{(e-j)}(m) \,,$$

also

$$(m+1)^e = 1 + \sum_{j=1}^{e} \binom{e}{j} \cdot S^{(e-j)}(m) \,,$$

und das ist die Formel (11), aus der durch Koeffizientenvergleich (12) folgt.
Die Formel (14) läßt sich aber auch so verwenden, daß man

$$S^{(e)}(n+m) - S^{(e)}(n) - S^{(e)}(m)$$

auf zwei verschiedene Arten ausdrücken kann. Man erhält auf diese Weise wie in [10] eine weitere Beziehung zwischen den Potenzsummen:

$$\sum_{j=1}^{e} \binom{e}{j} \cdot n^j \cdot S^{(e-j)}(m) = \sum_{i=1}^{e} \binom{e}{i} \cdot m^i \cdot S^{(e-i)}(n) \,. \tag{15}$$

Um aus (15) eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten $a_k^{(e)}$ der Potenzsummen zu gewinnen, setzt man wieder (1) in (15) ein und erhält:

$$\sum_{j=1}^{e} \binom{e}{j} \cdot n^j \cdot \sum_{i=1}^{e-j+1} a_i^{(e-j)} \cdot m^i = \sum_{i=1}^{e} \binom{e}{i} \cdot m^i \cdot \sum_{j=1}^{e-i+1} a_j^{(e-i)} \cdot n^j \,,$$

und ein Vergleich der Koeffizienten bei $n^j \cdot m^i$ führt zur <u>Rekursionsgleichung</u>:

$$\text{Für alle } i \ge 1 \text{ und } j \ge 1 \text{ mit } i + j \le e+1 \text{ gilt: } \binom{e}{j} \cdot a_i^{(e-j)} = \binom{e}{i} \cdot a_j^{(e-i)}. \tag{16}$$

Hierbei ist die Indexbeschränkung nicht wesentlich, da für Indizes außerhalb des angegebenen Bereichs die Binomialkoeffizienten oder die Koeffizienten $a_x^{(y)}$ verschwinden.

Wie man mit Hilfe von (16) verschiedene $a_x^{(y)}$ ineinander umrechnen kann, wird durch die Index–Neubenennung

$$x := i; \quad z := j; \quad y := e - j$$

deutlicher. (16) schreibt sich dann als

$$a_x^{(y)} = \frac{\binom{y+z}{x}}{\binom{y+z}{y}} \cdot a_z^{(z+y-x)}. \tag{17}$$

Insbesondere gilt für $z = 1$:

$$a_x^{(y)} = \frac{\binom{y+1}{x}}{y+1} \cdot a_z^{(1+y-x)}. \tag{18}$$

Zunächst kann man sich leicht davon überzeugen, daß (4) und (12) nicht verschiedene Rekursionsformeln sind, sondern mit Hilfe von (17) ineinander transformiert werden können. Außerdem läßt sich mit (18) eine besonders einfache Form für die Potenzsumme $S^{(e)}(n)$ gewinnen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} S^{(e)}(n) &= \sum_{j=1}^{e+1} a_j^{(e)} \cdot n^j \\ &= \frac{1}{e+1} \cdot \sum_{j=1}^{e+1} \binom{e+1}{j} \cdot a_1^{(e+1-j)} \cdot n^j. \end{aligned}$$

<u>4.2 Einführung der Bernoullischen Zahlen</u>

Schreibt man nun

$$A^{e+1-j} := a_1^{(e+1-j)}. \tag{19}$$

und faßt die A^{e+1-j} formal als Potenzen auf, so vereinfacht sich die Potenzsummenformel zu

$$S^{(e)}(n) = \frac{1}{e+1} \cdot \left((A+n)^{e+1} - A^{e+1} \right). \tag{20}$$

Dabei lassen sich die A^k leicht berechnen: Da (20) insbesondere auch für $n = 1$ richtig ist, gilt:

$$1 = \frac{1}{e+1} \cdot \left((A+1)^{e+1} - A^{e+1} \right) \text{ für } e \ge 1,$$

also

$$(A+1)^m - A^m = m \text{ für } m \ge 2 \text{ und } A^0 = 1.$$

Damit berechnen sich die A^k rekursiv zu

$$A^1 = \frac{1}{2}; \quad A^2 = \frac{1}{6}; \quad A^3 = 0; \quad A^4 = -\frac{1}{30}; \quad \cdots.$$

Da wegen (9) die $a_{e-2\cdot i}^{(e)}$ für $i \ge 1$ verschwinden, gilt aufgrund von (18) und (19), daß

$$A^{2\cdot i+1} = 0 \text{ für } i \geq 1.$$

Die A^k sind zu den gewöhnlichen Bernoulli-Zahlen B^k (vgl. etwa [2]) analog; auf diese wird man geführt, wenn man $S^{(e)}(n)$ nicht als Polynom in n, sondern als Polynom in n+1 betrachtet (vgl. (6) und (7)).
Weil (17) und damit (18) auch für die $b_x^{(y)}$ gilt, hat die Potenzsumme $S^{(e)}(n)$ auch die Form

$$S^{(e)}(n) = \sum_{j=1}^{e+1} b_j^{(e)} \cdot (n+1)^j$$

$$= \frac{1}{e+1} \cdot \sum_{j=1}^{e+1} \binom{e+1}{j} \cdot b_1^{(e+1-j)} \cdot (n+1)^j.$$

Schreibt man nun auch hier

$$B^{e+1-j} := b_1^{(e+1-j)}$$

und faßt die B^{e+1-j} formal als Potenzen auf, so ist

$$S^{(e)}(n) = \frac{1}{e+1} \cdot \left((B+n+1)^{e+1} - B^{e+1} \right). \tag{21}$$

Da dies auch für $n = 0$ richtig ist, gilt:

$$0 = (B+1)^{e+1} - B^{e+1} \text{ für } e \geq 1,$$

also

$$(B+1)^m = B^m \text{ für } m \geq 2 \text{ und } B^0 = 1.$$

Damit berechnen sich die B^k rekursiv zu

$$B^1 = -\frac{1}{2}; \quad B^2 = \frac{1}{6}; \quad B^3 = 0; \quad B^4 = -\frac{1}{30};$$

$$B^5 = 0; \quad B^6 = \frac{1}{42}; \quad B^7 = 0; \quad B^8 = -\frac{1}{30};$$

$$B^9 = 0; \quad B^{10} = \frac{5}{66}; \quad B^{11} = 0; \quad B^{12} = -\frac{691}{2730}; \quad \cdots$$

Außerdem gilt, daß

$$B^{2\cdot i+1} = 0 \text{ für } i \geq 1.$$

Die Bernoullischen Zahlen sind nach Jakob Bernoulli (1654-1705) benannt, in dessen „Ars conjectandi“ (Basel 1713) i.w. die Formel (21) steht sowie die ersten Bernoullischen Zahlen angegeben sind. Die B^k liegen für weite Bereiche tabelliert vor (eine kleine Tabelle bis zum Index 30 findet sich in [11], eine ausführlichere bis zum Index 124 in [15]). Die Zahlen weisen ein recht bizarres Verhalten auf und sind mit elementaren Mitteln nicht weiter erforschbar. In [2] z.B. sind ihre wichtigsten Eigenschaften dargestellt, und wie man aus der Angabe dieser Quelle ahnen kann, spielen sie eine eminent wichtige Rolle in der Zahlentheorie. So verwundert es nicht, daß sie in der mathematischen Fachliteratur sehr reichhaltig behandelt wurden und immer noch werden.
Die Namensgebung sollte aber nicht zu dem Schluß verleiten, daß Bernoulli der erste Erforscher der Potenzsummen gewesen wäre. So hat, nach Anfängen für kleine e im Altertum und bei den Arabern, Faulhaber (1580-1635) Formeln für $S^{(e)}(n)$ für $e \leq 17$ angegeben, allerdings ohne Beweis oder Methode. 1636 hat dann Fermat (1601-1665) in einem Brief behauptet, eine allgemeine Methode zu haben (und daß das glaubhaft ist, wird in [1] erläutert; die Methode beruht auf allgemeinen Formeln für figurierte Zahlen). Unabhängig davon hat Pascal (1623-1662) wohl als erster eine allgemeine Formel für die $S^{(e)}(n)$ veröffentlicht, die ebenfalls mit Hilfe von figurierten Zahlen gefunden wurde. Leibniz (1646-1716) hingegen schlug einen Weg über Differenzenbildungen ein, und dies soll auch das Thema des folgenden Abschnitts sein.

5. Differenzenrechnung

Einen anderen Zugang zu Potenzsummenformeln gewinnt man mit Hilfe von Differenzenbeziehungen.

5.1 Iterierte Differenzen

Betrachtet man die zu summierenden ersten n Potenzen, so fällt auf, daß deren (iterierte) Differenzen eine konstante Folge bilden:

i	0	1	2	3	4
Δi	1	1	1	1	

i^2	0	1	4	9	16
Δi^2	1	3	5	7	
$\Delta^2 i^2$	2	2	2		

i^3	0	1	8	27	64
Δi^3	1	7	19	37	
$\Delta^2 i^3$	6	12	18		
$\Delta^3 i^3$	6	6			

Nun ist ja nach (2)

$$S^{(e)}(n+1) - S^{(e)}(n) = (n+1)^e ,$$

mithin läßt sich das Differenzenschema um eine Zeile nach oben fortsetzen, worin die Potenzsummen stehen; es ist also (exemplarisch wird hier $e = 3$ betrachtet)

$$\Delta^{-1} i^3 = S^{(3)}(i-1) .$$

Außerdem läßt sich das Differenzenschema nach links erweitern. Dazu beginnt man mit der untersten Zeile und arbeitet nach oben:

i	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$\Delta^{-1} i^3$	36	9	1	0	0	1	9	36	100
i^3	–27	–8	–1	0	1	8	27	64	
Δi^3	19	7	1	1	7	19	37		
$\Delta^2 i^3$	–12	–6	0	6	12	18			
$\Delta^3 i^3$	6	6	6	6	6	6			
$\Delta^4 i^3$	0	0	0	0	0	0			

Es bestätigt sich das Ergebnis von Abschnitt 2.4, daß $S^{(3)}(-1) = 0$ und $S^{(3)}(-n) = S^{(3)}(1+n)$ ist.

Das erweiterte Differenzenschema läßt sich benutzen, um Formeln für die Potenzsummen aufzustellen: Beispielsweise entsteht die 100 $\left(= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3\right)$ am Ende der ersten Zeile durch sukzessive Summationen:

$$\begin{array}{rc} & 100 \\ = & 36+64 \\ = & 9+27+27+64 \\ = & 9+2\cdot 27+64 \\ = & 1+8+2\cdot(8+19)+19+18 \\ = & 1+3\cdot 8+3\cdot 19+18 \\ = & 0+1+3\cdot(1+7)+3\cdot(7+12)+12+6 \\ = & 0+4\cdot 1+6\cdot 7+4\cdot 12+6 \\ = & 0+0+4\cdot(0+1)+6\cdot(1+6)+4\cdot(6+6)+6+0 \\ = & 0+5\cdot 0\cdot +10\cdot 1+10\cdot 6+5\cdot 6+0. \end{array}$$

(Es ist sinnvoll, in der zu $i = 0$ gehörigen Spalte aufzuhören, da diese die meisten Nullen enthält.)
Man erkennt, daß auf strukturell gleiche Weise $(a+b)^4$ gebildet wird:

$$\begin{array}{rc} & (a+b)^4 \\ = & a\cdot(a+b)^3+b\cdot(a+b)^3 \\ = & a^2\cdot(a+b)^2+2\cdot a\cdot b\cdot(a+b)^2+b^2\cdot(a+b)^2 \\ = & a^3\cdot(a+b)+3\cdot a^2\cdot b\cdot(a+b)+3\cdot a\cdot b^2\cdot(a+b)+b^3\cdot(a+b) \\ = & a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4 \end{array}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} 100 &= S^{(3)}(4) \\ &= \Delta^{-1}5^3 \\ &= \binom{5}{0}\cdot 0+\binom{5}{1}\cdot 0+\binom{5}{2}\cdot 1+\binom{5}{3}\cdot 6+\binom{5}{4}\cdot 6+\binom{5}{5}\cdot 0 \\ &= \binom{5}{0}\cdot\Delta^{-1}0^3+\binom{5}{1}\cdot\Delta^{0}0^3+\binom{5}{2}\cdot\Delta^{1}0^3+\binom{5}{3}\cdot\Delta^{2}0^3+\binom{5}{4}\cdot\Delta^{3}0^3+\binom{5}{5}\cdot\Delta^{4}0^3. \end{aligned}$$

Auch hier ist die prinzipielle Verallgemeinerbarkeit dieser Vorgehensweise evident. Es folgt

$$S^{(e)}(n-1) = \Delta^{-1}n^e = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\Delta^{-1+i}(n-k)^e, \tag{22}$$

also für $k = n$:

$$S^{(e)}(n-1) = \Delta^{-1}n^e = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot\Delta^{i-1}0^e.$$

Wegen $\Delta^j 0^e = 0$ für $j = -1,\ 0$ und für $j > e$ vereinfacht sich diese Beziehung noch; nach Änderung das Summationsindexes folgt

$$S^{(e)}(n) = \sum_{i=0}^{e}\binom{n+1}{i+1}\cdot\Delta^i 0^e. \tag{23}$$

An (23) ist als Phänomen bemerkenswert, daß man nur die Potenzen $1^e,\ 2^e, \cdots, e^e$ braucht, um die Summe $1^e+2^e+\cdots+n^e$ für beliebiges n zu berechnen.

Für kleine e schreibt sich (23) als

$$S^{(1)}(n) = \binom{n+1}{2},$$

$$S^{(2)}(n) = \binom{n+1}{2} + 2\cdot\binom{n+1}{3},$$

$$S^{(3)}(n) = \binom{n+1}{2} + 6\cdot\binom{n+1}{3} + 6\cdot\binom{n+1}{4},$$

$$S^{(4)}(n) = \binom{n+1}{2} + 14\cdot\binom{n+1}{3} + 36\cdot\binom{n+1}{4} + 24\cdot\binom{n+1}{5},$$

$$S^{(4)}(n) = \binom{n+1}{2} + 30\cdot\binom{n+1}{3} + 150\cdot\binom{n+1}{4} + 240\cdot\binom{n+1}{5} + 120\cdot\binom{n+1}{6}.$$

Eine Formel wie (22) läßt sich nicht nur für $\Delta^{-1} n^e$ entwickeln, sondern es gilt allgemein, daß

$$\Delta^m n^e = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \Delta^{m+i} (n-k)^e.$$

Diese Beziehung läßt sich als Analogon zur Taylorformel der Analysis auffassen; sie wird nach Gregory und Newton benannt.
Setzt man in ihr $m = 0$ und $k = n$, so folgt, daß

$$\begin{aligned} n^e &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \Delta^i 0^e \\ &= \sum_{i=1}^{e} \binom{n}{i} \cdot \Delta^i 0^e. \end{aligned} \tag{24}$$

5.2 Summation von Differenzen

Ist (y_i) eine Folge und (Δy_i) ihre Differenzenfolge, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta y_i = y_{n+1} - y_1, \tag{25}$$

d.h. Differenzenbildung und Summation sind in gewissem Sinne zueinander invers, wie das ja auch für das Differenzieren und Integrieren gilt:

$$\int_a^b f'(x)\cdot dx = f(b) - f(a).$$

Die Summation von i^e entspricht nun der Berechnung von $\int x^n \cdot dx$. Man braucht im Falle des Integrals eine Funktion f mit der Eigenschaft $f'(x) = x^n$, so daß

$$\int_a^b x^n \cdot dx = \int_a^b f'(x)\cdot dx = f(b) - f(a)$$

gilt. Daß man f so leicht finden kann, liegt natürlich daran, daß die Ableitung von Potenzen besonders einfach ist.

Wie geht man im Fall der endlichen Summe vor?

Auch hier bräuchte man eine Folge $\left(y_i\right)$ mit der Eigenschaft $\Delta y_i = i^e$. Da allerdings die Differenzenbildung bei Potenzen

$$\Delta j^n = \left(j+1\right)^n - j^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \cdot j^i$$

nicht gerade den Eindruck einer leichten Umkehrbarkeit macht, wird man nach anderen Objekten Ausschau halten, auf die der Differenzenoperator besser anwendbar ist und mit denen Potenzen darstellbar sind.
Nach (24) gilt ja, daß

$$i^e = \sum_{j=1}^{e} \binom{i}{j} \cdot \Delta^j 0^e$$

ist. Wegen

$$\Delta \binom{i}{n+1} = \binom{i}{n}$$

(der Differenzenoperator beziehe sich auf i) folgt somit:

$$\begin{aligned}
S^{(e)}(n) &= \sum_{i=1}^{n} i^e \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{e} \binom{i}{j} \cdot \Delta^j 0^e \\
&= \sum_{j=1}^{e} \Delta^j 0^e \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{e} \Delta^j 0^e \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta \binom{i}{j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{e} \Delta^j 0^e \cdot \left[\binom{n+1}{j+1} - \binom{1}{j+1} \right] \qquad \text{(wegen (25))} \\
&= \sum_{j=1}^{e} \Delta^j 0^e \cdot \binom{n+1}{j+1},
\end{aligned}$$

womit man wieder (23) erhalten hat.

5.3 Explizite Darstellung der Bernoullischen Zahlen

Die Darstellung (23) läßt sich verwenden, um in Verbindung mit (21) zu einer expliziten Darstellung der Bernoulli-Zahlen zu kommen ([3]):
Es ist

$$S^{(e)}(n) = \frac{1}{e+1} \cdot \left(\left(B+n+1\right)^{e+1} - B^{e+1} \right)$$

und

$$S^{(e)}(n) = \sum_{i=1}^{e} \binom{n+1}{i+1} \cdot \Delta^i 0^e,$$

also

$$\frac{1}{e+1} \cdot \left(\left(B+n+1\right)^{e+1} - B^{e+1} \right) = \sum_{i=1}^{e} \binom{n+1}{i+1} \cdot \Delta^i 0^e.$$

Teilt man auf beiden Seiten durch n+1, so hat man

$$B^e + (n+1)\cdot(\;\cdots\;) = \sum_{i=1}^{e} \frac{1}{i+1}\cdot\binom{n}{i}\cdot\Delta^i\,0^e\,.$$

Nun liegt es nahe, $n = -1$ zu setzen. Auf der linken Seite bleibt B^e stehen. Ob die rechte Seite überhaupt sinnvoll bleibt, muß man sich zunächst überlegen, ebenso, was man unter $\binom{-1}{i}$ verstehen soll. Eine (vielleicht schon im Zusammenhang mit der binomischen Formel diskutierte) Möglichkeit besteht darin,

$$\binom{-1}{i} := \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\dots\cdot(-i)}{i!} = (-1)^i$$

zu setzen.
Dann ist

$$B^e = \sum_{i=1}^{e} \frac{1}{i+1}\cdot(-1)^i\cdot\Delta^i\,0^e\,.$$

Beispielsweise ist

$$B^4 = -\frac{1}{2}+\frac{14}{3}-\frac{36}{4}+\frac{24}{5} = -\frac{1}{30}\,.$$

Literatur

[1] C.B. Boyer: Pascal's formula for the sums of powers of the integers. Scr. math. **9** (1943), 237-244.

[2] S.I. Borevitsch - I.R. Schafarevitsch: Zahlentheorie. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1966.

[3] L. Carlitz: The Staudt–Clausen theorem. Math. mag. **34** (1960/61), 131-146.

[4] H.-J. Engel: Figurierte Zahlen. Math. lehren **40** (1990), 18-22.

[5] G. Frobenius: Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome. S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1910) 809-847.

[6] S. Goldberg: Introduction to difference equations. New York: Dover Publications 1986.

[7] P. Hohler / M. Jakob: Formeln für Potenzsummen durch doppeltes Abzählen. PM **33** (1991), 160-162.

[8] W. Kroll: Eine einheitliche geometrische Methode zur Bestimmung der Potenzsummenformeln. PM **31** (1989), 321-325.

[9] G. Pólya: Vom Lösen mathematischer Aufgaben I. Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser ^{2}1979.

[10] D.R. Snow: Formulas for sums of powers of integers by functional equations. Aequ. Math. **18** (1978), 269-285.

[11] M.R. Spiegel: Endliche Differenzen und Differenzengleichungen. Hamburg – New York usw.: McGraw-Hill 1982.

[12] J. Tropfke: Geschichte der Elementar–Mathematik. Band VI. Berlin – Leipzig: De Gruyter ^{2}1924.

[13] A. Volkenborn: Entdeckendes Lernen bei der Herleitung der Potenzsummenformeln. PM **30** (1988), 274-277.

[14] U. Warnecke: Zur Polynomdarstellung von $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^k$ für beliebiges $k\in\mathbf{N}$. MSB **30** (1983), 106-114.

[15] L. Washington: Introduction to cyclotomic fields. Berlin u.a.: Springer 1982.

[16] B. Zimmermann: Gudrun auf den Spuren von Gauß und Descartes. Math. lehren **47** (1991), 30-41.