

Warum bewegen sich die Planeten auf Ellipsen?

Newton erklärt Kepler

Die Gesetze von Kepler

Johannes Kepler (ca. 1571 bis ca. 1630¹) formulierte aufgrund astronomischer Daten seine drei bekannten Gesetze:

(K I) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

(K II) Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen, d. die „Flächengeschwindigkeit“ ist konstant.

(K III) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen ihrer Ellipsen. Ist τ die Umlaufzeit und a die Länge der großen Halbachse, so hat das

Verhältnis $\frac{\tau^2}{a^3} =: \delta$ für alle Planeten den gleichen Wert.

Seit Kepler weiß man, *dass* es so ist, *wusste* aber damals nicht, *warum* es so ist, konnte noch nicht die Beobachtungen als Folge eines einzigen Gesetzes erklären. Dies wurde erst von Isaac Newton (ca. 1642 bis ca. 1726) erreicht: Die drei Kepler'schen Gesetze sind die Folge eines universell wirkenden

Gravitationsgesetzes $F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \cdot R$ (mit den Vektoren F und R und $r = |R|$) sowie dem Postulat,

dass jede Bewegungsänderung auf eine Kraft der Gestalt $F = m \cdot A$ (Masse mal Beschleunigung² $A = V' = R''$) zurückgeführt wird gemäß dem Newton'schen Grundsatz³: „Ein Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn wirken“, einem Grundsatz, der empirisch nicht verifizierbar ist, denn man wird nirgendwo einen Ort finden, an dem keinerlei Kräfte wirken. Zudem widerspricht er der Alltagserfahrung, wonach jede Bewegung einen permanenten Antrieb braucht, um nicht zum Erliegen zu kommen.

Eine Kraft wird als proportional zur Bewegungsänderung angesetzt⁴, d.h. proportional zur Beschleunigung. Wir werden sehen, inwiefern aus diesen Grundannahmen die empirisch gut bestätigten Kepler'schen Gesetze folgen.

¹ Man findet die Lebensdaten von Kepler und später von Newton gemäß dem julianischen oder gregorianischen Kalender, aber auf diesen Unterschied von etwa einem Jahr soll es uns hier nicht ankommen.

² Vektoren werden hier mit Großbuchstaben bezeichnet; ist Z ein Vektor, so ist $z = |Z|$. Der Strich bedeutet immer die Ableitung nach der Zeit.

³ Newton, I. (1687): *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. The authoritative translation, 1999 University of California Press (in Hinkunft bezeichnet als *Principia*), *Axioms, or the Laws of Motion, Law I* (noch vor Book I)

⁴ *Principia, Axioms, or the Laws of Motion, Law II* (noch vor Book I)

Wie kommt man auf das Gravitationsgesetz? Die Auswirkung von (K III)

Nach (K I) bewegen sich Planeten auf Ellipsen. Kreise sind spezielle Ellipsen. Bei einer Kreisbahn mit

dem Radius r hat die Zentrifugalbeschleunigung den Betrag $a = \frac{v^2}{r}$. Bewegt sich der Körper mit

konstanter Geschwindigkeit auf der Bahn, so gilt, dass $a = \frac{v^2}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{r \cdot \tau^2}$, wo τ die Umlaufdauer ist.

Nach (K III) gilt $\tau^2 = \delta \cdot r^3$ mit einer Konstanten δ .

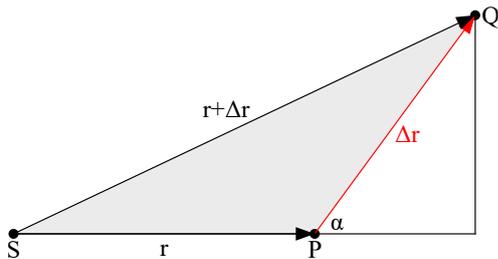
Damit ist $a = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{r \cdot \delta \cdot r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{\delta} \cdot \frac{1}{r^2}$ der Betrag der Zentrifugalbeschleunigung. Die Zentrifugalkraft

muss der Gravitationskraft die Waage halten, also wird die Gravitationskraft den Betrag $|F| = \mu \cdot \frac{m}{r^2}$

haben und damit die Gestalt $F = \mu \cdot \frac{m}{r^3} \cdot R$ mit einer Konstanten μ , in der aus Symmetriegründen auch

die Masse des Zentralkörpers steckt. (Wie man in der Newton-Biographie von Westfall⁵ auf S. 402 nachlesen kann, war und ist umstritten, wer zuerst auf die Idee kam, die Zentrifugalbeschleunigung mit (K III) zu verknüpfen.)

Der Inhalt von (K II): Die Planetenbahnen sind *ebene* Kurven



Ein Planet bewege sich von P nach Q. Die überstrichene Fläche $\Delta\rho$ hat den Inhalt

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \frac{1}{2} \cdot |r| \cdot |\Delta r| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |R| \cdot |V| \cdot \Delta t \cdot \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot |R \times V| \cdot \Delta t = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot |L| \cdot \Delta t \end{aligned}$$

mit dem *Drehimpuls* $L = m \cdot R \times V$. Dessen Ableitung (nach der Zeit) ist

$$L' = m \cdot R' \times V + m \cdot R \times V' = R \times (m \cdot A) = R \times F = 0$$

WENN es eine von der Sonne ausgehende Zentralkraft $F = \mu \cdot \frac{m}{r^3} \cdot R$ gibt, dann gilt (unabhängig von der Planetenbahn): $R \times F = 0$, also $L' = 0$. Dann ist der Drehimpuls konstant, also ist die Kurve *eben*.

Außerdem ist dann $\rho' = \frac{|L|}{2 \cdot m}$ konstant, und das ist der Inhalt von (K II). Dieses folgt also schon aus der Annahme einer von der Sonne ausgehenden Zentralkraft⁶.

Klärung von (K I): Die Planeten bewegen sich auf Kegelschnitten

Dies ist der schwierigste Teil. Newtons Ausführungen in den Principia sind nicht leicht verständlich. In dieser Datei werden zwei unterschiedliche Begründungen dargestellt; die erste benutzt Formeln der

⁵ Westfall, R. (1980): Never at Rest, Cambridge University Press.

⁶ Principia, Book I, Section 2, Prop. 1.

Vektorgeometrie und orientiert sich an der in Pollard, S. 6 ff.⁷ dargestellten Vorgehensweise von Laplace. Die zweite Begründung ist stärker analytisch und orientieren sich an Hahn⁸.

Da sich nach Kepler Planeten auf Ellipsen bewegen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, ist es naheliegend, Polarkoordinaten zu benutzen, deren Pol die Sonne ist. Auf einen Planeten mit der

Masse m wirkt die Gravitationskraft $F = \mu \cdot \frac{m}{r^3} \cdot R$, und nur hieraus und aus dem Kraftgesetz $F = m \cdot A$

kann schon geschlossen werden, dass die Bahn einen Kegelschnitt darstellt. Hierzu stellen wir uns erst einmal die Kegelschnittgleichungen in Polarkoordinaten zusammen.

Die Kegelschnitte in Polarkoordinaten

Man wählt einen Brennpunkt (die Sonne) als Pol und misst die Winkel gegenüber der positiven x-Achse.

Bei der **Ellipse** (mit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$):

Die blaue Strecke⁹ EF' hat wegen $EF + EF' = 2 \cdot a$ die Länge $2 \cdot a - r$.

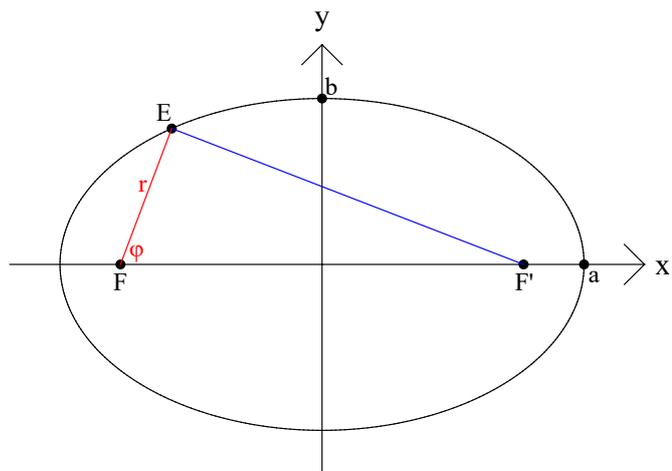
Mit $b^2 = a^2 - f^2$ liefert der Cosinussatz

$$(2 \cdot a - r)^2 = (2 \cdot f)^2 + r^2 - 2 \cdot 2 \cdot f \cdot r \cdot \cos \varphi$$

$$4 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot r = 4 \cdot f^2 - 4 \cdot f \cdot r \cdot \cos \varphi$$

$$a^2 - a \cdot r = f^2 - f \cdot r \cdot \cos \varphi$$

$$r = \frac{b^2}{a - f \cdot \cos \varphi}$$

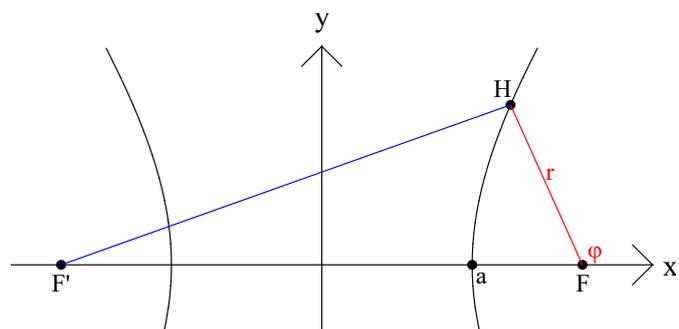


Das ist die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten (φ, r). Beim Kreis um F mit dem Radius r ist $f = 0$ und $a = b = r$.

Bei der **Hyperbel** (mit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$):

Die blaue Strecke HF' hat wegen $HF' - HF = 2 \cdot a$ die Länge $2 \cdot a + r$.

Mit $b^2 = f^2 - a^2$ liefert der Cosinussatz



⁷ Pollard, Harry (1976): Celestial Mechanics. Man findet ein pdf im Internet.

⁸ Hahn, A. (2020): Basic Calculus of Planetary Orbits, Springer.

⁹ Dass hier auch Punkte mit Großbuchstaben bezeichnet werden, dürfte nicht zur Verwirrung führen, zumal sich Vektoren als Differenzen von Punkten auffassen lassen.

$$\begin{aligned}(r+2\cdot a)^2 &= r^2 + 4\cdot f^2 + 2\cdot 2\cdot f\cdot r\cdot \cos\varphi \\ r^2 + 4\cdot r\cdot a + 4\cdot a^2 &= r^2 + 4\cdot f^2 + 4\cdot f\cdot r\cdot \cos\varphi \\ r\cdot a + a^2 &= f^2 + f\cdot r\cdot \cos\varphi \\ r\cdot a - f\cdot r\cdot \cos\varphi &= f^2 - a^2\end{aligned}$$

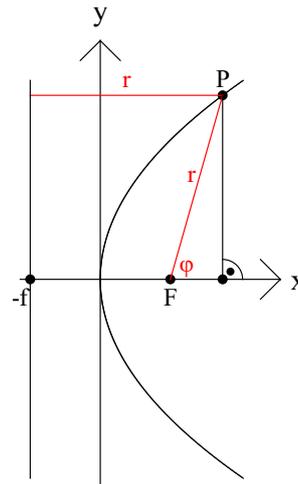
$$r = \frac{b^2}{a - f\cdot \cos\varphi}$$

Das ist die Hyperbelgleichung in Polarkoordinaten.

Bei der **Parabel** (mit $y^2 = 4\cdot f\cdot x$) ist

$$\cos\varphi = \frac{r-2\cdot f}{r} = 1 - \frac{2\cdot f}{r}$$

$$r = \frac{2\cdot f}{1 - \cos\varphi}$$



Der vektorgeometrische Weg zur Kegelschnitt-Bahn

Die Gravitationskraft ist eine Kraft, daher gilt $\mu \cdot \frac{m}{r^3} \cdot R = m \cdot A$ bzw. $-\mu \cdot \frac{1}{r^3} \cdot R = A$, da R und A unterschiedliche Richtungen haben

Es ist $(R \times V)' = R' \times V + R \times V' = R \times A = -\mu \cdot \frac{1}{r^3} \cdot R \times R = 0$, also ist $R \times V$ konstant, was wir schon wussten; es ist $L = m \cdot R \times V$ der Drehimpuls.

Die Planeten bewegen sich in einer Ursprungsebene senkrecht zu $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$. Ein typischer Bahnpunkt

hat dann die Form $R = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $V = R' = r' \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varphi'$ und daher

$$R \times V = r \cdot r' \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_0 + r^2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varphi' = r^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \varphi', \text{ also } \lambda = \frac{|L|}{m} = r^2 \cdot \varphi'.$$

Ferner gilt (weiterhin mit $r=|R|$), dass die Ableitung von $r^2=R^2$ zu $2 \cdot r \cdot r' = 2 \cdot R \cdot R'$ führt und damit zu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R}{r} \right) = \frac{r \cdot R' - r' \cdot R}{r^2} = \frac{R^2 \cdot R' - r \cdot r' \cdot R}{r^3} = \frac{R^2 \cdot R' - (R \cdot R') \cdot R}{r^3} = \frac{(R \times R') \times R}{r^3} = \frac{(R \times V) \times R}{r^3}.$$

Beim vorletzten Gleichheitszeichen wurde die Graßmann-Formel $A \times (B \times C) = (A \cdot C) \cdot B - (A \cdot B) \cdot C$ benutzt.

Multiplikation mit $-\mu$ führt zu

$$-\mu \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{r} \right) = -\mu \cdot \frac{(R \times V) \times R}{r^3} = -\frac{L}{m} \times \frac{\mu \cdot R}{r^3} = \frac{L}{m} \times \left(\frac{-\mu \cdot R}{r^3} \right) = \frac{L}{m} \times V' = \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{m} \times V \right)$$

und damit zu $\mu \cdot \left(\frac{R}{r} + C \right) = V \times \frac{L}{m}$ mit der Integrationskonstanten C.

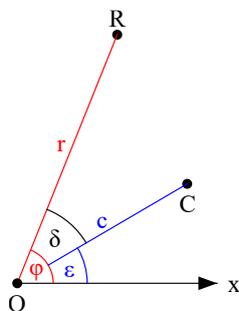
Multipliziert man auf beiden Seiten skalar mit L, so sieht man, dass $C \cdot L = 0$ sein muss; C liegt also in der Bahnebene. Was kann man über das konstante C sagen?

Multipliziert man die letzte eingekastelte Gleichung auf beiden Seiten skalar mit R, so ergibt sich

$$\mu \cdot (r + C \cdot R) = \left(V \times \frac{L}{m} \right) \cdot R = (R \times V) \cdot \frac{L}{m} = \frac{L^2}{m^2}.$$

Beim vorletzten Gleichheitszeichen wurde die Eigenschaft $(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$ des Spatprodukts benutzt.

Ist $C=0$, so ist r konstant. Kreisbewegungen werden jedoch nicht beobachtet. Daher ist $C \neq 0$ und $c = |C| > 0$.



Bildet OC mit der x-Achse den Winkel ϵ und OR den Winkel ϕ , so sei $\delta = \phi - \epsilon$.

Ausgehend von der x-Achse, ϕ und r lässt sich R eindeutig beschreiben. Dies gilt aber auch für die Achse OC, δ und r.

Wegen $R \cdot C = r \cdot c \cdot \cos \delta$ wird aus der Formel $\mu \cdot (r + C \cdot R) = \frac{L^2}{m^2}$ die Beziehung

$$r = \frac{L^2}{m^2 \cdot \mu \cdot (1 + c \cdot \cos \delta)}.$$

Dies ist die Polargleichung eines Kegelschnitts.

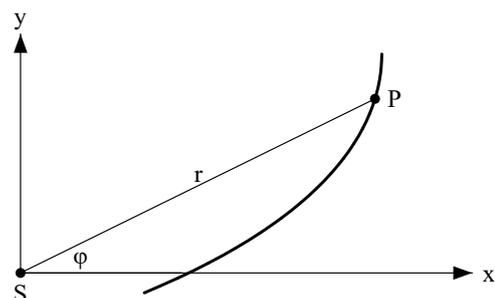
Ein analytischer Weg zur Kegelschnitt-Bahn

Einige rechnerische Vorbereitungen

Ein Planet hat von der Sonne S den Abstand r und bildet mit einer gedachten Rechtsachse den Winkel ϕ .

Im cartesischen x-y-System ist $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} =: r \cdot K.$

P hängt ab von r und von ϕ , und diese beiden Größen hängen von der Zeit t ab.



Da im Kraftgesetz der Betrag a der Beschleunigung vorkommt, wird man die ersten beiden Ableitungen von P brauchen.

Zur Notation: Ist $Q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, so sei $Q^\perp = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$. Die Ableitung nach der Zeit wird mit einem Strich versehen: Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird das Argument bei ϕ' weggelassen.

Wegen der Kettenregel sind die Ableitungen von $K = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ komplexer als gewohnt:

$$K = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}; K' = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \phi' = K^\perp \cdot \phi'; K'' = \left(\begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \cdot \phi' \right) \cdot \phi' + K^\perp \cdot \phi'' = -K \cdot (\phi')^2 + K^\perp \cdot \phi''.$$

Die Ableitungen von P sind noch etwas komplexer:

$$P = r \cdot K(\phi); P' = r' \cdot K + r \cdot K'; P'' = r'' \cdot K + 2 \cdot r' \cdot K' + r \cdot K''.$$

Einsetzen liefert nach kurzer Rechnung

$$P'' = K \cdot \left(r'' - r \cdot (\phi')^2 \right) + K^\perp \cdot (2 \cdot r' \cdot \phi' + r \cdot \phi''),$$

ein Ausdruck, der sich erfreulicherweise etwas vereinfachen lässt. Es ist nämlich $2 \cdot r' \cdot \phi' + r \cdot \phi'' = 0$, da $r \cdot (2 \cdot r' \cdot \phi' + r \cdot \phi'')$ die Ableitung von $r^2 \cdot \phi'$ ist, und dieser Ausdruck ist konstant. Es handelt sich nämlich um den Betrag λ des (schon als konstant erkannten) durch m geteilten Drehimpulses

$$P \times P' = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \phi \\ r \cdot \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r' \cdot \cos \phi - r \cdot \sin \phi \cdot \phi' \\ r' \cdot \sin \phi + r \cdot \cos \phi \cdot \phi' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \cdot \phi' \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Beschleunigungsvektor $P'' = K \cdot \left(r'' - r \cdot (\phi')^2 \right)$.

Berücksichtigt man nun noch die Beziehung $r^2 \cdot \phi' = \lambda$, ergibt sich die nur noch von r und r'' und nicht mehr von ϕ abhängige Beschleunigung zu

$$P'' = \left(r'' - \frac{\lambda^2}{r^3} \right) \cdot K = \left(r'' - \frac{\lambda^2}{r^3} \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

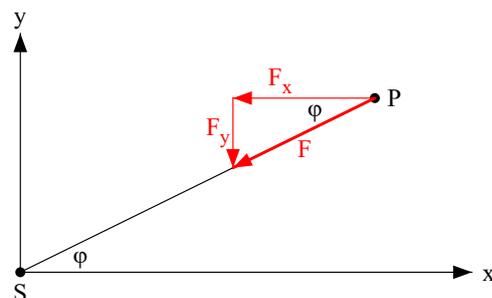
aus der sich die Gravitationskraft ermitteln lässt:

Es ist

$$F_x = |F| \cdot \cos \phi = -m \cdot x'' = -m \cdot \cos \phi \cdot \left(r'' - \frac{\lambda^2}{r^3} \right)$$

$$F_y = |F| \cdot \sin \phi = -m \cdot y'' = -m \cdot \sin \phi \cdot \left(r'' - \frac{\lambda^2}{r^3} \right)$$

$$\boxed{|F| = -m \cdot \left(r'' - \frac{\lambda^2}{r^3} \right)}$$



Damit hat man den Betrag der Gravitationskraft ohne ϕ ausgedrückt.

Es lohnt sich, $r = \frac{1}{s}$ zu setzen. Unter wiederholter Benutzung von $\lambda = r^2 \cdot \varphi'$ bzw. $\varphi' = \lambda \cdot s^2$ ist dann

$$r = \frac{1}{s}; \quad r' = -\frac{s' \cdot \varphi'}{s^2} = -\lambda \cdot s'; \quad r'' = -\lambda \cdot s'' \cdot \varphi' = -\lambda^2 \cdot s^2 \cdot s'' \quad \text{und deshalb}$$

$$|F| = -m \cdot \left(r'' - \frac{\lambda^2}{r^3} \right) = -m \cdot \left(-\lambda^2 \cdot s^2 \cdot s'' - \lambda^2 \cdot s^3 \right) = m \cdot \lambda^2 \cdot s^2 \cdot (s + s'')$$

Andererseits ist $|F| = \mu \cdot \frac{m}{r^2} = \mu \cdot m \cdot s^2$. Gleichsetzen liefert $s - \frac{\mu}{\lambda^2} + s'' = 0$; diese Differentialgleichung

hat die Lösung

$$z(\varphi) = A \cdot \cos \varphi + B \cdot \sin \varphi$$

$$s(\varphi) = A \cdot \cos \varphi + B \cdot \sin \varphi + \frac{\mu}{\lambda^2}$$

Bisher war die gedachte Rechtsachse nur dadurch bestimmt, dass sie in der Bahnebene liegt. Dreht man sie so um die Sonne, dass s bei 0° ein (lokales) Minimum hat, dass also

$$s'(\varphi) = -A \cdot \sin \varphi + B \cdot \cos \varphi$$

$$s'(0) = B = 0$$

$$s''(\varphi) = -A \cdot \cos \varphi$$

$$s''(0) = -A > 0$$

gilt, so ist

$$s = \frac{1}{r} = A \cdot \cos \varphi + \frac{\mu}{\lambda^2}$$

$$r = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda^2} + A \cdot \cos \varphi} = \frac{\lambda^2}{\mu + A \cdot \lambda^2 \cdot \cos \varphi} \quad \text{mit } A < 0$$

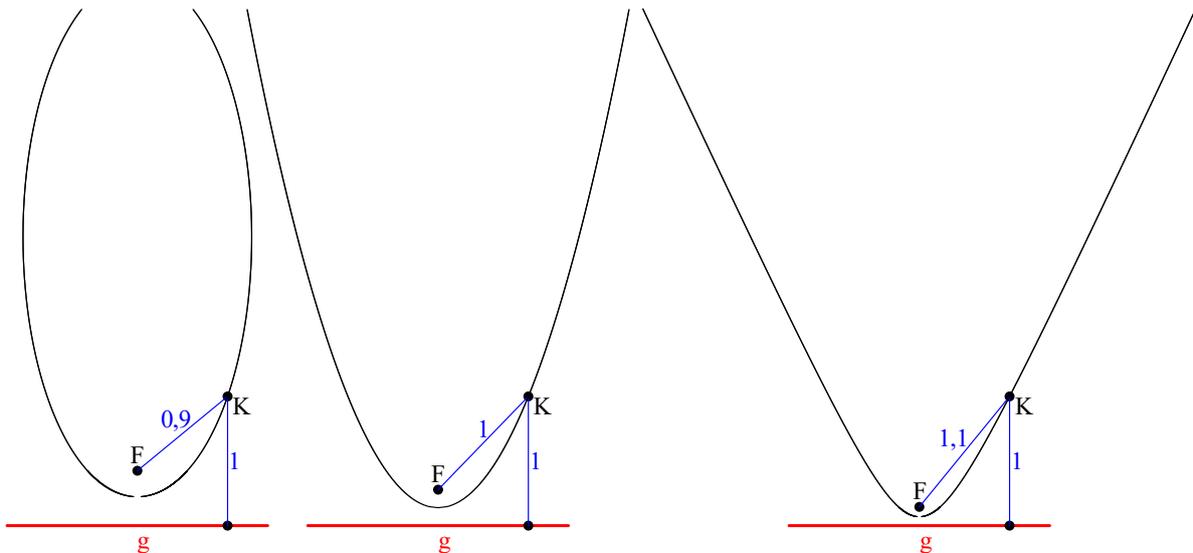
und damit bewiesen, dass die Planetenbahn ein Kegelschnitt, aber kein Kreis ist.

Warum Ellipsen?

Da Planeten immer wiederkehren, kommt für sie nur eine elliptische Bahn in Frage.

Auch Kometen bewegen sich auf Kegelschnittbahnen, und zwar auf Ellipsen oder auf Hyperbeln.

Parabeln kommen nicht vor, bei ihnen ist das Verhältnis des Abstands zwischen Kurvenpunkt und Brennpunkt F einerseits und zwischen Kurvenpunkt und Leitlinie g andererseits genau 1, bei Ellipsen ist das Verhältnis kleiner als 1 und bei Hyperbeln größer als 1. Wird dies Verhältnis auch nur geringfügig gestört, wird aus der Parabel eine Ellipse oder eine Hyperbel. Im folgenden Bild sieht man in der Mitte eine Parabel, links eine Ellipse und rechts den oberen Ast einer Hyperbel.



Alternative Lösungen

Man findet in McCallum et al.¹⁰, Appendix J eine Begründung dafür, dass auch ein Gravitationsgesetz der Form $F=k \cdot m \cdot r$ (mit einer Konstanten k , die auch die Sonnenmasse enthält) auf eine Ellipsenbahn führt, was schon Newton festgestellt hatte¹¹. Allerdings sitzt jetzt die Zentralmasse nicht in einem Brennpunkt, sondern im Mittelpunkt der Ellipse (was den empirischen Befunden widerspricht).

Die Differentialgleichungen $x'' = -k \cdot x$; $y'' = -k \cdot y$ führen auf $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot \cos(\sqrt{k} \cdot t) + B \cdot \sin(\sqrt{k} \cdot t) \\ C \cdot \cos(\sqrt{k} \cdot t) + D \cdot \sin(\sqrt{k} \cdot t) \end{pmatrix}$.

Dreht man das gedachte Koordinatensystem so, dass

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot \sqrt{k} \\ D \cdot \sqrt{k} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x'\left(\frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{k}}\right) \\ y'\left(\frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{k}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \cdot \sqrt{k} \\ -C \cdot \sqrt{k} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist, so folgt $A=D=0$ und deshalb $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot \sin(\sqrt{k} \cdot t) \\ C \cdot \cos(\sqrt{k} \cdot t) \end{pmatrix}$, also eine Ellipsenbahn.

Ellipsenformen sind also auch mit anderen Formen des Gravitationsgesetzes vereinbar.

¹⁰ McCallum, W. / Hughes-Hallett, D. / Gleason, A. et al. (1996): Multivariable Calculus, Wiley.

¹¹ Principia, Book I, Section 10, Proposition 47.

Alternative Zugänge

... zur Ellipsenform der Kegelschnitte gibt es viele; schulnahe Zugänge sind etwa Longair¹², Kap. 2.5 und Wittmann¹³. Recht elegant (aber nur in Maßen schulnah) ist die Herleitung nach Sommerfeld¹⁴.

Philosophische Digression

Es wurde vielleicht deutlich, dass manche Annahmen, von denen Newton ausging, nicht empirisch verifizierbar waren; dazu gehört auch die universelle Gültigkeit des Gravitationsgesetzes. Dass die Gravitationskraft auch dann wirkt, wenn es zwischen den in Rede stehenden Massen gar keinen Kontakt gibt, ist ebenfalls verwunderlich, entspricht jedoch der Alltagserfahrung, dass ein Apfel zu Boden fällt, ohne dass es zwischen Apfel und Erde einen vermittelnden Kontakt gibt. Ein solches Vorgehen ist typisch für die Wissenschaft:

„The fact is that the deepest and most general scientific ideas about space, time, and the organization of matter have their roots largely in abstraction from perceptual experience (...).“¹⁵

Theorien und die damit verbundenen Ideen dienen „nur“ dazu, unsere Erfahrungswelt zu ordnen und sie zu vervollständigen:

„Ideen (...) sind (...) heuristische Fiktionen.“¹⁶

Die fundamentierenden Ideen bedienen sich oft unanschaulicher Begriffe wie „Gravitation“, „Elektron“ oder gar „Quark“ – ob es die diesen Begriffen zugeordnete Objekte wirklich „gibt“? Ihre Verwendung wird durch ihren Nutzen legitimiert:

„(...) hinsichtlich ihrer epistemologischen Fundierung unterscheiden sich physikalische Objekte und Homers Götter nur graduell und nicht prinzipiell. (...) Der Mythos der physikalischen Objekte ist epistemologisch den meisten anderen darin überlegen, dass er sich darin wirksamer als andere Mythen erwiesen hat, dem Fluss der Erfahrungen eine handliche Struktur aufzuprägen.“¹⁷

Dies wurde von Christia(a)n Huyghens (1629 - 1695) sehr prägnant formuliert:

„Les principes se vérifient par les consequences qu'on en tire.“¹⁸

Albert Einstein wird zitiert mit den Bemerkungen¹⁹

„Dass das Gebäude unserer Wissenschaft auf Prinzipien beruht und beruhen muss, die nicht selbst aus der Erfahrung stammen, das wird wohl ohne Zweifel anerkannt werden. (...)“

¹² Longair, Malcolm S. (1984, dt. 1991): Theoretische Konzepte der Physik. Springer.

¹³ Wittmann, Erich Ch. (2015): Von den Hüllkurvenkonstruktionen der Kegelschnitte zu den Planetenbahnen. In: Mathem. Semesterberichte 62(1), S. 17-36.

¹⁴ Sommerfeld, Arnold (1942): Mechanik, § 6. Nachdruck beim Verlag Harri Deutsch.

¹⁵ Bohm, David (1998): On creativity, Routledge; S. 38.

¹⁶ Kant, Immanuel (1781): Kritik der reinen Vernunft, 1974 Suhrkamp; A 771.

¹⁷ Quine, Willard Van Orman (1951): Zwei Dogmen des Empirismus. In: Quine, Von einem logischen Standpunkt, 1979 Ullstein; S. 49.

¹⁸ Vorwort zu Huyghens (1690): *Traité de la lumière*.

¹⁹ S. Friedlaender: Kant gegen Einstein. Nachdruck 2008: Waitawhile.

Grundgesetze werden nicht durch Sortieren einzelner Tatsachen erkannt oder durch Induktion erschlossen, sondern durch „intuitive Erfassung des Wesentlichen eines großen Tatsachenkomplexes“.

Dass die Erklärung der Welt auf empirisch nicht Fassbares zurückgeführt wird, ist nicht neu. Schon der Vorsokratiker Anaximander (ca. 611 – ca. 546 v. Chr. Geb.) hatte nicht etwa Wasser, Luft oder Feuer als Wesensgrund aufgefasst, sondern das (prinzipiell nicht erkennbare) Unendliche (in der Fassung des Unbegrenzten). Der Tübinger Altphilologe Wolfgang Schadewaldt²⁰ kommentierte das wie folgt:

„Dass der Gedanke von etwas immerhin noch Angebbarem vorgeschritten war zu diesem Umfassenden, das nur noch negativ zu bezeichnen war, ist ein ganz gewaltiger Denkschritt, der bei allem Konkreten auch wieder eine mächtige Abstraktion enthält gegenüber den üblichen menschlichen Denkgewohnheiten.“ (S. 239)

Anaximander hatte Wirkung. Bei Aristoteles liest man im Buch A seiner *Metaphysik*²¹:

„Die sogenannten Pythagoreer (...) handeln von fernerliegenden Prinzipien und Elementen als die Naturphilosophen. Grund dafür ist, das sie die Prinzipien nicht von den Sinnesdingen ableiten“ (A1; 990a)

Das hat sich bis in den Deutschunterricht herumgesprochen, denn schon Friedrich Schiller hat – in etwas anderem Zusammenhang - geschrieben²²:

„Wer sich über die Wirklichkeit nicht hinauswagt, der wird nie die Wahrheit erobern.“

Digression zum gesunden Menschenverstand

Dass das Gesetz, das einen Apfel fallen lässt, auch die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne kreisen lässt, klingt zunächst widersinnig, insbesondere in der Zeit von Kepler und Newton. Heute haben wir uns daran gewöhnt, aber damals war das revolutionär. Auch dass man mit Analysis, wo es um infinitesimal Kleines geht, Phänomene des Weltalls beschreiben kann, gibt zur Verwunderung Anlass. Nun ist es häufiger anzutreffen, „dass fast alle wirklich neuen Ideen bei ihrem ersten Auftreten einen gewissen Aspekt des Unsinnigen mit sich bringen“²³, wobei die Unsinnigkeit auch eine Folge der Unsinnlichkeit ist. Noch drastischer drückte es Nietzsche²⁴ aus: „Fast überall ist es der Wahnsinn, welcher dem neuen Gedanken den Weg bahnt.“ Man braucht ungewöhnliche und kühne Gedanken, um weiterzukommen.

²⁰ Schadewaldt, Wolfgang [1978]: Die Anfänge der Philosophie bei den Griechen. Suhrkamp.

²¹ Aristoteles: *Metaphysik* (Übersetzung: Schwarz). Reclam.

²² Schiller, Friedrich (1795): Über die ästhetische Erziehung des Menschen, in einer Reihe von Briefen, 10. Brief.

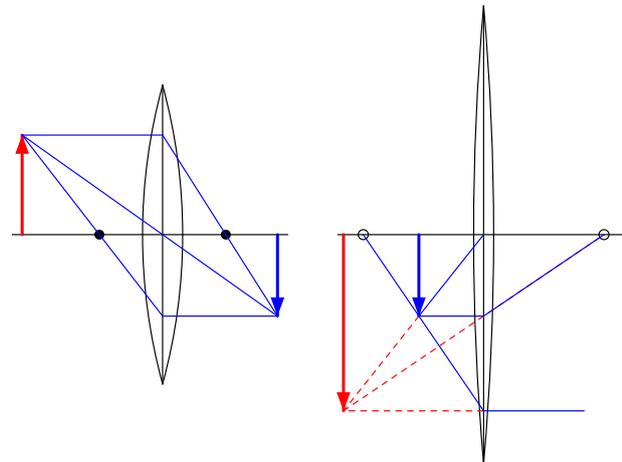
²³ Whitehead, Alfred North (1925). *Wissenschaft und moderne Welt*. 1988 Suhrkamp, S. 63.

²⁴ Nietzsche, Friedrich: *Morgenröte*, 1. Buch, §14.

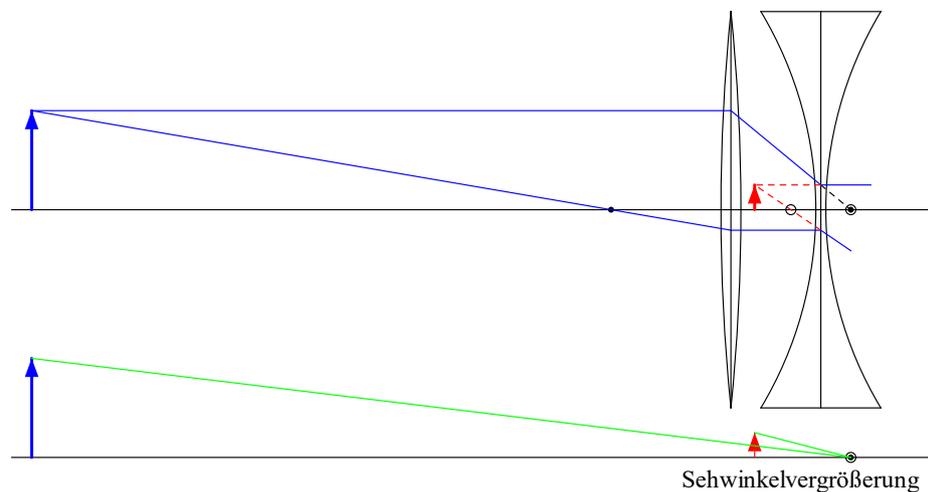
Digression über Fernrohre

Der Übergang zu einer Welterklärung, die nicht mehr von real Nachweisbarem ausgeht, spiegelt sich auch in der Entwicklung der Fernrohre.

Das Kepler-Fernrohr besteht aus zwei Sammellinsen. Links in rot sieht man den abzubildenden Gegenstand. Es gibt ein reelles Zwischenbild (blau), das von einem Schirm aufgefangen werden kann und das mit einer Lupe (rechts) betrachtet wird. Das Bild der Lupe ist zwar virtuell, aber daran hatte man sich schon gewöhnt und konnte die Lupe benutzen, ohne vielleicht die Idee mit den rückwärtigen Verlängerungen verstanden zu haben.



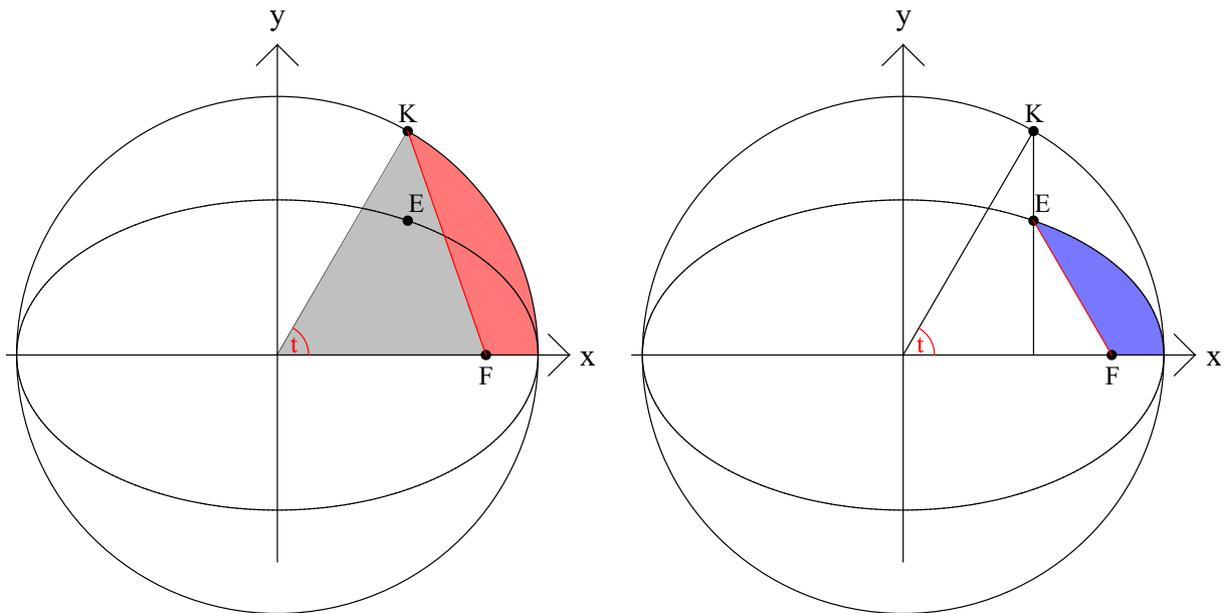
Das Galilei-Fernrohr besteht aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse, die augseitig (rechts) einen gemeinsamen Brennpunkt haben. Hier gibt es kein reelles Zwischenbild mehr.



Wieder ist links in blau der Gegenstand und rot dessen Bild. Darunter sieht man die unvermutet große Schwinkervergrößerung, die mit dieser Art von Fernrohr erreicht wird, das außerdem den Vorteil hat, dass das Bild aufrecht steht.

Mathematische Digression zu (K II)

Es geht um die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche, die im Bild rechts blau getönt ist.



Zum Ellipsenpunkt $E = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$ gehört der Kreispunkt $K = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \end{pmatrix}$. Es sei t im Bogenmaß gemessen. Dann ist im Bild links

$$\text{grau} + \text{rot} = \frac{t}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{t}{2} \cdot a^2$$

$$\text{grau} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f \cdot \sin t$$

$$\text{rot} = \frac{a}{2} \cdot (a \cdot t - f \cdot \sin t)$$

und daher rechts $\text{blau} = \frac{b}{2} \cdot (a \cdot t - f \cdot \sin t)$. Will man zu vorgegebenem Flächenanteil den zugehörigen Winkel t bestimmen, muss man diese Gleichung lösen, was nur numerisch möglich ist.

Die Graphik zeigt das Ergebnis, wenn man den Flächeninhalt in 10 Teile so aufteilt, dass der Fahrstrahl jeden Teil in derselben Zeit überstreicht. Es ist deutlich zu sehen, dass die Bahngeschwindigkeit nicht konstant sein kann, sondern dass die Bahngeschwindigkeit rechts in Sonnennähe viel größer sein muss als links in Sonnenferne. Man hat den Eindruck, als sei es dem Planeten in Sonnennähe zu heiß.

