Jörg MEYER, Hameln

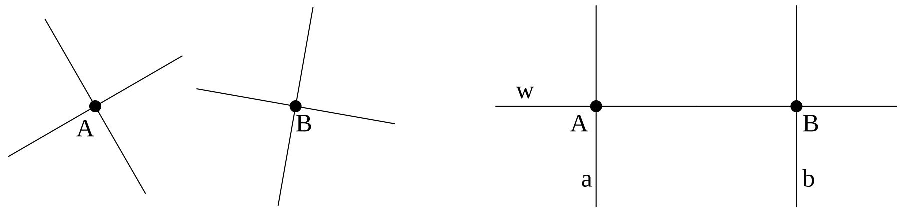
Mehrfache Punktspiegelungen

1. Zweifache Punktspiegelung

Spiegelt man den Punkt P erst an A und dann an B, so bekommt man wegen $A = \frac{P+P'}{2}$ erst $P' = 2 \cdot A - P$ und dann $P'' = 2 \cdot B - P' = 2 \cdot (B-A) + P$, also insgesamt eine *Verschiebung*.

Das ist auch geometrisch klar: Die Punktspiegelung an A lässt sich durch die Spiegelung an zwei zueinander senkrechten Achsen, die beide durch A verlaufen, ersetzen; eine analoge Aussage gilt auch für B.

Nun kann man bei der Siegelung an A die eine Achse so wählen, dass sie durch B verläuft, und bei der Spiegelung an B die eine Achse so wählen, dass sie durch A verläuft. Die beiden Siegelungen an $w = AB$ heben sich auf, und die beiden verbleibenden Achsen sind zueinander parallel, so dass sich insgesamt eine Verschiebung ergibt: $S_B \circ S_A = S_b \circ S_w \circ S_w \circ S_a = S_b \circ S_a$.



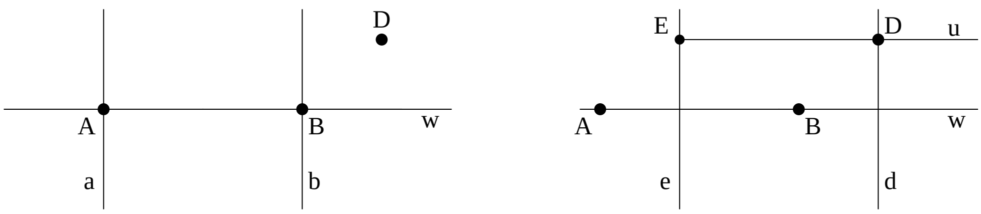
2. Dreifache Punktspiegelung

Spiegelt man den Punkt P erst an A und dann an B, bekommt man $P'' = 2 \cdot (B-A) + P$. Spiegelt man weiter an D, bekommt man $P''' = 2 \cdot D - P'' = 2 \cdot (D + A - B) - P$, also insgesamt eine *Punktspiegelung* an $D + A - B$.

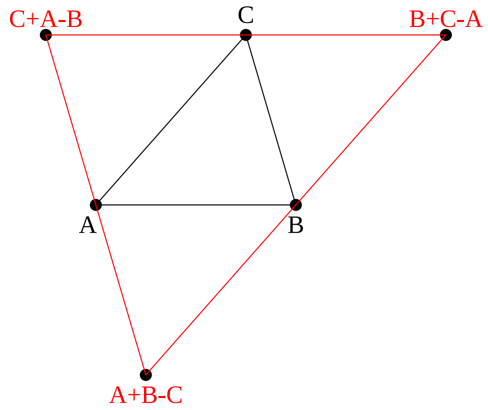
Die lässt sich auch geometrisch leicht einsichtig machen: Die beiden zu AB senkrechten Achsen lassen sich so parallel verschieben, dass eine durch D verläuft. Die andere der durch D verlaufenden Achsen (u in der folgenden Skizze) ist dann parallel zu $w = AB$. Dann gilt

$$S_D \circ S_B \circ S_A = S_D \circ S_b \circ S_a = S_D \circ S_d \circ S_e = S_u \circ S_d \circ S_d \circ S_e = S_u \circ S_e = S_E .$$

Dabei ist $E = D - (B - A)$.



Ist ABC ein Dreieck, so beschreibt $D = C + A - B$ eine Ecke des Außendreiecks. Spiegelt man einen Punkt P erst an A, dann an B und schließlich an C, so bleibt der Mittelpunkt von P und P''' bei allen Bewegungen von P konstant, da man die dreifache Punktspiegelung durch eine einfache Spiegelung an D ersetzen kann.


C+A-B
C
B+C-A
A
B
A+B-C