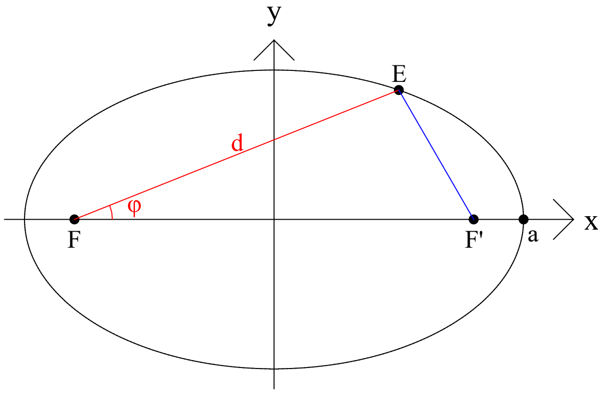
Jörg MEYER, Hameln

Das Latus rectum eines Kegelschnitts

Kegelschnitte lassen sich auch mit Polarkoordinaten beschreiben. Dazu wähle man einen Brennpunkt als Pol und messe die Winkel gegenüber der positiven x-Achse.

Bei der **Ellipse**:
Die blaue Strecke hat wegen $F'E + EF = 2\cdot a$ die Länge $2\cdot a - d$.

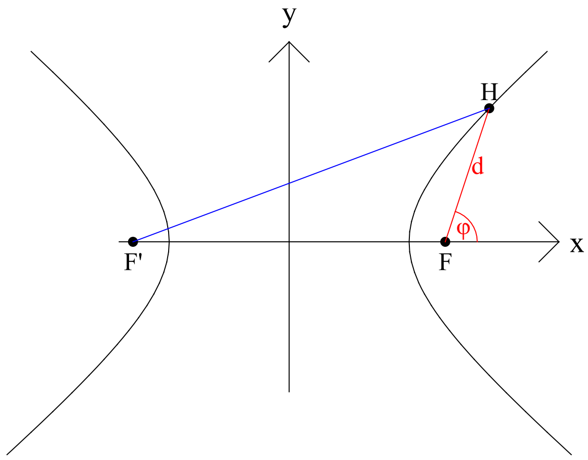


Der Cosinussatz liefert

$$(2\cdot a - d)^2 = (2\cdot f)^2 + d^2 - 2\cdot 2\cdot f\cdot d\cdot\cos\varphi$$
$$4\cdot a^2 - 4\cdot a\cdot d = 4\cdot f^2 - 4\cdot f\cdot d\cdot\cos\varphi$$
$$a^2 - a\cdot d = f^2 - f\cdot d\cdot\cos\varphi$$
$$\boxed{d = \frac{b^2}{a - f\cdot\cos\varphi}}$$

Das ist die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten (d, φ).

Bei der **Hyperbel**:
Die blaue Strecke hat wegen $F'H - HF = 2\cdot a$ die Länge $2\cdot a + d$.



Der Cosinussatz liefert

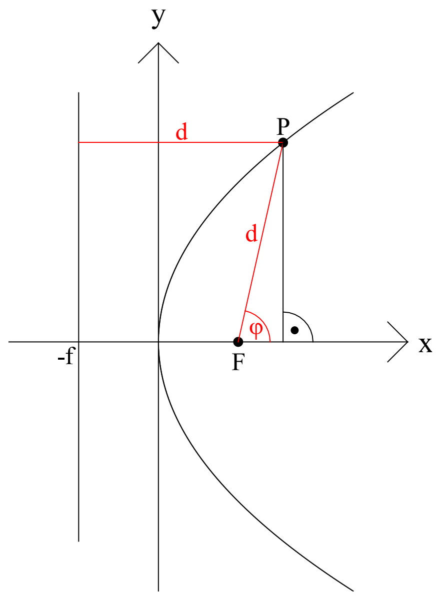
$$(d + 2\cdot a)^2 = d^2 + 4\cdot f^2 + 2\cdot 2\cdot f\cdot d\cdot\cos\varphi$$
$$d^2 + 4\cdot d\cdot a + 4\cdot a^2 = d^2 + 4\cdot f^2 + 4\cdot f\cdot d\cdot\cos\varphi$$
$$d\cdot a + a^2 = f^2 + f\cdot d\cdot\cos\varphi$$
$$d\cdot a - f\cdot d\cdot\cos\varphi = f^2 - a^2$$
$$\boxed{d = \frac{b^2}{a - f\cdot\cos\varphi}}$$

Das ist die Hyperbelgleichung in Polarkoordinaten (d, φ).

Bei der **Parabel** mit $y^2 = 4 \cdot f \cdot x$ ist

$$\cos\varphi = \frac{d - 2\cdot f}{d} = 1 - \frac{2\cdot f}{d}$$

$$\boxed{d = \frac{2\cdot f}{1-\cos\varphi}}$$



Bei den drei Polargleichungen

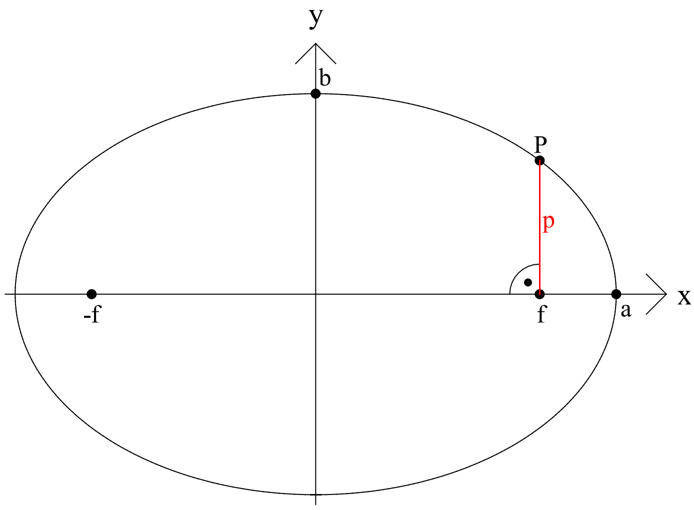
$$\text{Ellipse: } d = \frac{b^2}{a - f\cdot\cos\varphi} = \frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{f}{a}\cdot\cos\varphi}$$

$$\text{Hyperbel: } d = \frac{b^2}{a - f\cdot\cos\varphi} = \frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{f}{a}\cdot\cos\varphi}$$

$$\text{Parabel: } d = 2\cdot f\cdot\frac{1}{1-\cos\varphi}$$

lassen sich bei Ellipse und Hyperbel Gemeinsamkeiten sehen, die sich auf den ersten Blick nicht mit der Parabel in Einklang bringen lassen. Was bedeutet der Vorfaktor $\frac{b^2}{a}$?

Das Rätsel klärt sich, wenn man bei Ellipse und Hyperbel die Brennpunkt-Ordinate berechnet:



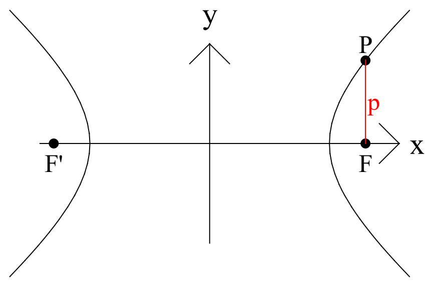
$$\sqrt{\left(\begin{pmatrix} f \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2} + p = 2\cdot a$$

$$4\cdot f^2 + p^2 = 4\cdot a^2 - 4\cdot a\cdot p + p^2$$

$$f^2 = a^2 - a\cdot p$$

$$p = \frac{a^2 - f^2}{a} = \boxed{\frac{b^2}{a} = p}$$

Kommt dieser Wert auch bei der Hyperbel heraus?



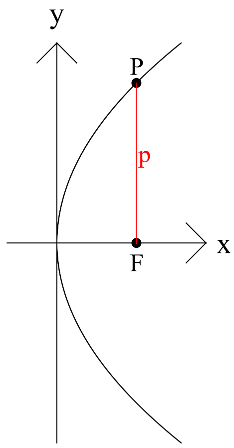
$$\sqrt{\left(\begin{pmatrix} f \\ p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2} - p = 2 \cdot a$$

$$4 \cdot f^2 + p^2 = 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot p + p^2$$

$$f^2 = a^2 + a \cdot p$$

$$p = \frac{f^2 - a^2}{a} = \boxed{\frac{b^2}{a} = p}$$

Tatsächlich dasselbe Resultat! Neugierig geworden, sieht man bei der Parabel nach:



Wegen $y^2 = 4 \cdot f \cdot x$ ist $p^2 = 4 \cdot f \cdot f$, also $\boxed{p = 2 \cdot f}$.

Hier war ein Ergebnis wie bei den beiden anderen Kegelschnitten auch nicht zu erwarten.
Aber nun schreiben sich die Polargleichungen durchgängig einheitlich:

$$\text{Ellipse:}\ d = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{f}{a} \cdot \cos\varphi} = \frac{p}{1 - \frac{f}{a} \cdot \cos\varphi}$$

$$\text{Hyperbel:}\ d = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{f}{a} \cdot \cos\varphi} = \frac{p}{1 - \frac{f}{a} \cdot \cos\varphi}$$

$$\text{Parabel:}\ d = 2 \cdot f \cdot \frac{1}{1 - \cos\varphi} = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

Bei der Ellipse ist $\frac{f}{a} < 1$, bei der Hyperbel ist $\frac{f}{a} > 1$. Formal ist bei der Parabel $\frac{f}{a} = 1$.

Die Größe p heißt (Halb-) **Parameter** oder Semilatus rectum. Das gesamte **Latus rectum** ist die Länge der Brennpunktsehne, die senkrecht auf der Brennpunktsachse steht.

Man sieht aber noch mehr:

Die Parabel hat die Gleichung $4 \cdot f \cdot x = \boxed{y^2 = 2 \cdot p \cdot x}$ mit dem Brennpunkt $F = \begin{pmatrix} p/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Verschiebt man die Ellipse so, dass der Westpol im Ursprung ist, bekommt man

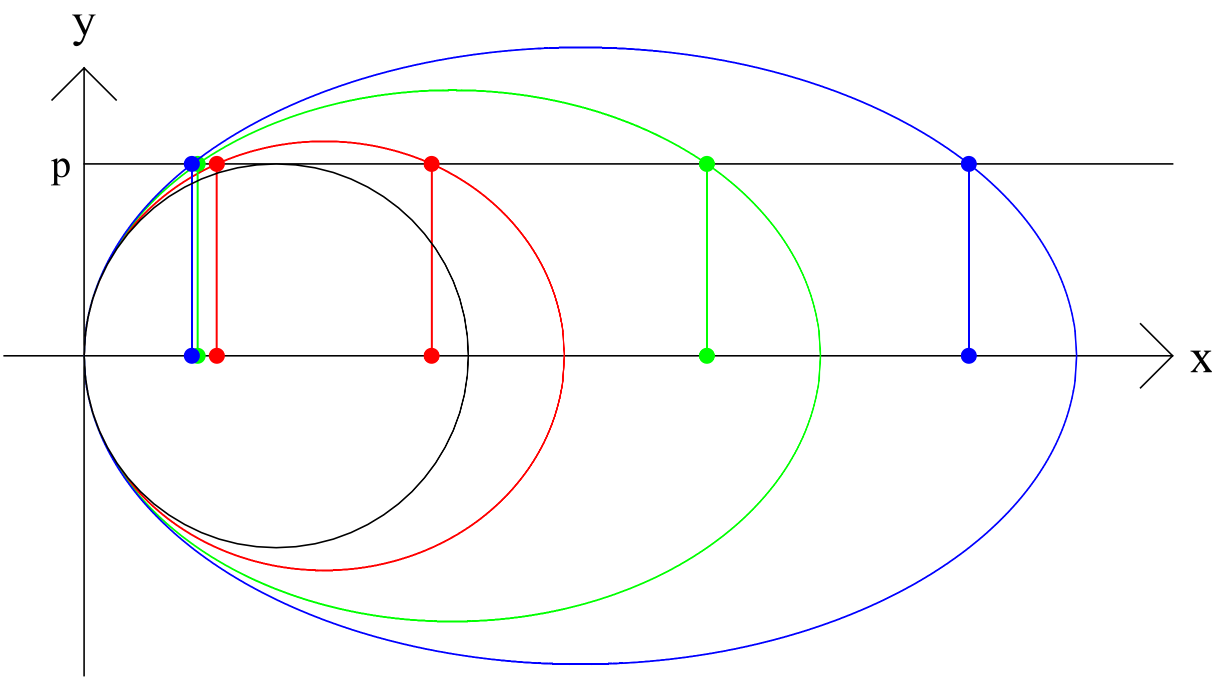
$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2 \cdot a \cdot x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(2 \cdot a \cdot x - x^2\right)$$

$$\boxed{y^2 = 2 \cdot p \cdot x - \frac{p}{a} \cdot x^2}$$

mit den Brennpunkten $F=\begin{pmatrix} a\pm f \\ 0 \end{pmatrix}$. Dabei ist $f=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-p\cdot a}$. Zu einem Parameter p gehören viele Scheitelpunktsellipsen. Alle haben im Westpol den gleichen Krümmungskreis (schwarz) mit dem Radius p.



Verschiebt man die Hyperbel so, dass der Ostpol im Ursprung ist, bekommt man

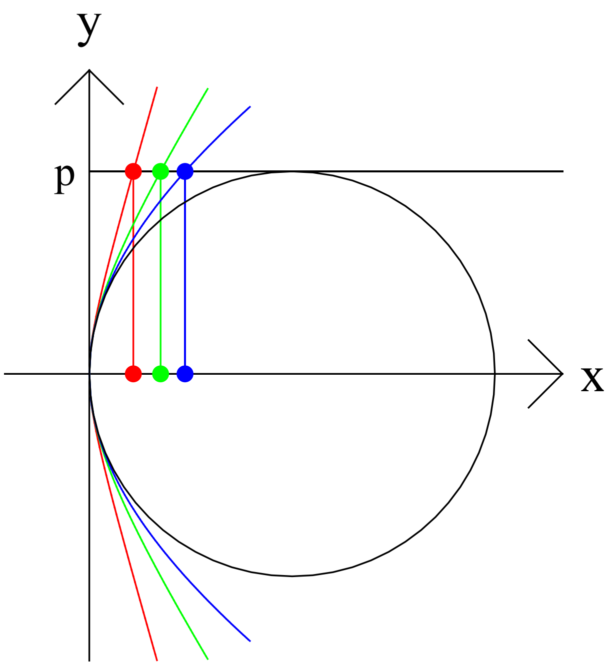
$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2+2\cdot a\cdot x}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot\left(2\cdot a\cdot x+x^2\right)$$

$$\boxed{y^2=2\cdot p\cdot x+\frac{p}{a}\cdot x^2}$$

mit den Brennpunkten $F=\begin{pmatrix} -a\pm f \\ 0 \end{pmatrix}$. Dabei ist $f=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+p\cdot a}$. Zu einem Parameter p gehören viele Scheitelpunktshyperbeln. Alle haben im Ostpol denselben Krümmungskreis (schwarz) mit dem Radius p.



Die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipse} & y^2 = 2\cdot p\cdot x - \frac{p}{a}\cdot x^2 \\ \text{Parabel} & y^2 = 2\cdot p\cdot x \\ \text{Hyperbel} & y^2 = 2\cdot p\cdot x + \frac{p}{a}\cdot x^2 \end{array}$$

sind durch Einführung des Parameters sehr übersichtlich geworden und werden noch übersichtlicher, wenn man die **numerische Exzentrizität** $\varepsilon := \frac{f}{a}$ einführt. Bei der Ellipse ist $\varepsilon^2 = \frac{f^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{p}{a} < 1$ und damit $-\frac{p}{a} = \varepsilon^2 - 1$, bei der Hyperbel ist $\varepsilon^2 = \frac{f^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{p}{a} > 1$ und damit $\frac{p}{a} = \varepsilon^2 - 1$. Damit hat man:

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipse} & y^2 = 2\cdot p\cdot x + \left(\varepsilon^2 - 1\right)\cdot x^2 \\ \text{Parabel} & y^2 = 2\cdot p\cdot x + \left(\varepsilon^2 - 1\right)\cdot x^2 \\ \text{Hyperbel} & y^2 = 2\cdot p\cdot x + \left(\varepsilon^2 - 1\right)\cdot x^2 \end{array}$$

Bei der Ellipse ist $0 \le \varepsilon < 1$ (bei $\varepsilon = 0$ hat man einen Kreis), bei der Parabel ist formal $\varepsilon = 1$, bei der Hyperbel ist $\varepsilon > 1$.

Hat man nur die Ellipse und die Hyperbel im Blick, hat man die gemeinsame Gleichung

$$\boxed{y^2 = \left(1 - \varepsilon^2\right)\cdot\left(2\cdot a\cdot x - x^2\right)}\,.$$