Von der Normalparabel zu kubischen Kurven[1]

von

Jörg Meyer, Hameln

Zusammenfassung: Alle kubischen Kurven, die achsensymmetrisch und rational parametrisierbar sind, werden durch Spielereien an der Normalparabel gewonnen. Auch die Schattenwürfe kubischer Kurven werden diskutiert.

Summary: Every cubic curve which is axisymmetric and which has a rational parametrization can be obtained by simple operations on the quadratic parabola. The shadows of cubic curves will be explained as well.

Didaktische Einleitung

Im herkömmlichen Mathematikunterricht zur Vektorgeometrie sind Geraden, Ebenen und Kreise / Kugeln immer noch die hauptsächlichen Inhalte, und zur Untersuchung dieser doch recht banalen Objekte werden weitausholende Methoden entwickelt. Dies hat aus didaktischer Sicht entscheidende Nachteile:

1. Die Objekte laden per se nicht zu einer weiteren Exploration ein. Was ist (aus Schülersicht) schon an Geraden spannend? Dies wird im Unterricht dadurch aufgefangen, dass Schnittpunkte und Schnittwinkel berechnet werden – wodurch der Schüler den falschen Eindruck bekommt, als sei das gesamte Methodenarsenal nur für dieses (mäßig spannende) Aufgabenmaterial entwickelt worden; Schulbücher verstärken dieses Empfinden noch.
2. Der Methodenreichtum (mindestens zwei Produkte, verschiedene Möglichkeiten der Objektbeschreibung) steht in krassem Missverhältnis zur Kargkeit der Objekte. Die Schüler erfahren gar nicht die Kraft und die Potenz der Methoden.
3. Die Schüler haben nicht die Möglichkeit, Objekte zu generieren. Selbst erzeugte Objekte sind immer spannender als fremd erzeugte oder sattsam bekannte.
4. Diejenigen Fragen, die in der Geschichte der Mathematik zur Entwicklung der Methoden geführt haben, sind zu den herkömmlichen Aufgaben fast disjunkt.
5. Da die gängigen Aufgaben Standardlösungen haben (Winkel mit Skalarprodukt, Abstände mit Hessescher Normalform, Schnitte mit Gaußverfahren, und für die restlichen „Probleme“ stehen die Formeln in der Formelsammlung),

---

[1] Der Aufsatz erschien in mathematica didactica **21** (2), S. 84 - 108 (1998). Er wurde hochgeladen mit freundlicher Erlaubnis des Verlegers.

können sich bei den Schülern nicht in dem Sinne Fähigkeiten ausbilden, dass sie selbständig zu einem Problem eine geeignete Methode auswählen. Das führt sogar dazu, dass bei zweidimensionalen Aufgaben in der Vektorgeometrie die Geradenform $y = m \cdot x + n$ verpönt ist.

6. Geraden, Ebenen und Kreise/Kugeln laden nicht zu einer Verknüpfung mit der Analysis ein, so dass die Vektorgeometrie zu einem vom Rest der Mathematik abgeschotteten Gebiet wird.
7. Die Ödheit der herkömmlichen Vektorgeometrie hat einen an der Schule moribunden Status herbeigeführt. Wie soll der Lehrer so etwas Langweiliges auch spannend unterrichten?

Ich beschreibe hier Elemente einer Unterrichtseinheit, die diese Nachteile nicht hat. Sie deckt sogar einige derjenigen Unterrichtsziele ab, die im Schulunterricht viel zu selten realisiert werden. Es handelt sich bei dieser Einheit um die Untersuchung selbsterzeugter zweidimensionaler Kurven: Durch einfache Spielereien mit der Normalparabel werden kubische Kurven gewonnen. Der Computer ist dabei ein unverzichtbares Hilfsmittel. Zu den oben erwähnten Kritikpunkten:

Ad 1. Die in dieser Einheit untersuchten Kurven sehen viel interessanter aus als Geraden oder Kreise. Wenn man sie mit Hilfe eines Computers erzeugt (mit dynamischer Geometriesoftware oder mit einem Funktionenplotter), bleiben in vielen Fällen dennoch Fragen bezüglich der Gestalt offen (s. u.). Solche Fragen brauchen vom Lehrer nur angeregt zu werden.

Ad 2. Abhängig von der Eindringtiefe in den Gegenstand dieser Unterrichtseinheit wird man die bekannten Methoden organisch erweitern. Die Entwicklung der Methoden wird vom Untersuchungsobjekt gesteuert.

Ad 3. Die Methoden können dazu benutzt werden, andere, vom Schüler selbst erfundene, Kurven sinnvoll zu untersuchen. Er kann mit der Normalparabel anders spielen, als es hier beschrieben steht, und er kann vieles statt mit der Normalparabel auch mit dem Kreis oder sonstigen Ausgangskurven machen.

Ad 4. Die Untersuchung von Kurven und Flächen hat in der Geschichte der Mathematik eine große Rolle gespielt, auch in der Entwicklung der Vektorgeometrie.

Ad 5. Die „Spielereien“ müssen mathematisch behandelt werden, wenn man die entstehenden Kurven näher untersuchen will. Wie diese Behandlung geschieht, ist fast beliebig; sie ist sogar weitgehend mit Mittelstufengeometrie möglich. (Nach meinen Erfahrungen bei Fortbildungen haben Lehrer mit dieser Methodenfreiheit viel mehr Probleme als die Schüler.)

Ad 6. Man wird sehen, dass die Untersuchung der erzeugten Kurven die Einbeziehung der Analysis erforderlich macht. Man kann nicht einmal sagen, ob die Einheit eher der Analysis oder eher der Vektorgeometrie zuzuordnen ist.

Ad 7. Durch interessante Objekte kann der Mathematikunterricht nur belebt werden.

Die oben erwähnten weiteren Vorteile sind:

8. Weite Bereiche der Einheit können parallel in Gruppenarbeit erschlossen werden; dies ist sogar die angemessene Unterrichtsform.
9. Man wird sehen, dass die erzeugten Kurven jeweils zu einer selbständigen systematischen Variation einladen. Dies Ziel kommt im gewöhnlichen Unterricht der Vektorgeometrie viel zu kurz. Meine Unterrichtserfahrungen haben gezeigt, dass Lernende (in Grund- und Leistungskurs) hier zunächst beträchtliche Defizite haben.
10. Man wird auch sehen, dass die erzeugten Kurven jeweils zu einer lokalen Klassifikation einladen. Das kennen die Schüler in der Kurvendiskussion von Funktionsscharen, aber kaum in der Vektorgeometrie.
11. Schließlich wird man auch sehen, dass die ebenen Kurven durch eine räumliche Behandlung überraschend an Durchsichtigkeit gewinnen.

Natürlich lassen sich mit der hier vorgestellten Einheit nicht alle Ziele des Mathematikunterrichts erreichen. So haben die Spielereien mit der Normalparabel nichts mit Anwendungs- oder Realitätsorientierung zu tun. Allerdings spielen die Resultate der Spielereien, die kubischen Kurven, eine Rolle im Computer Aided Geometric Design, also in einem Gebiet, das von Anwendungen der Vektorgeometrie lebt.

Zu den Lerngruppen: Die Erzeugung der kubischen Kurven und deren phänomenologische Klassifikation lässt sich im Grundkurs erfolgreich durchführen; die mathematische Klassifikation ist natürlich dem Leistungskurs vorbehalten.

Mathematische Einleitung

Die erste – fast vollständige – Klassifikation der kubischen Kurven stammt von Newton; er kommt auf gut 70 verschiedene Typen. Beschränken wir uns auf zur y-Achse symmetrische kubische Kurven, so zeigen einfache Überlegungen, dass nur die folgenden Gleichungen zu erwarten sind:

$x^2 = a \cdot y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d$

Diese Kurven heißen divergente Parabeln (Kap. 1).

$x^2 \cdot y = a \cdot y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d$

Diese Kurven haben verschiedene Namen:

Für $a < 0$ heißen sie defektive Hyperbeln (Kap. 3), sie haben nur eine Asymptote.

Für $a > 0$ heißen sie redundante Hyperbeln (Kap. 4), sie haben drei Asymptoten.

Für $a = 0; \quad b \neq 0$ heißen sie parabolische Hyperbeln (Kap. 5), sie nähern sich der Normalparabel an.

Für $a = 0; \quad b = 0$ heißen sie Kegelschnitt-Hyperbolismen (Kap. 6 und 8).

All diese Kurven können Wendepunkte haben (wenn, dann immer genau zwei) oder Doppelpunkte (wenn, dann immer genau einen) oder Spitzen (maximal eine). Solche Punkte werden in Kapitel 2 diskutiert.

Der Inhalt dieses Beitrags besteht darin, zu zeigen, dass man alle achsensymmetrischen kubischen Kurven, die rational parametrisierbar sind, durch recht elementare Spielereien an der Normalparabel gewinnen kann. „Rationale Parametrisierung" bedeutet, dass jeder Punkt der Kurve beschrieben werden kann als $C(t) = \frac{1}{h(t)} \cdot \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$, wo f, g und h Polynome vom Maximalgrad 3 sind. Es gibt kubische Kurven, deren allgemeiner Punkt nicht so darstellbar ist: Die kubische Fermatkurve mit $x^3 + y^3 = 1$ ist symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden des Koordinatensystems, hat aber nur zwei Punkte mit rationalen Koordinaten und ist daher nicht rational parametrisierbar.

Dass hier wirklich alle achsensymmetrischen kubischen Kurven mit rationaler Parametrisierung erreicht werden, wird dadurch gezeigt, dass wir alle von Newton angegebenen Typen erreichen („alle" heißt also „alle modulo Newtons Klassifikation"; deren Vollständigkeit wird hier natürlich nicht diskutiert). Um dies deutlich zu machen, werde ich alle einschlägigen Graphiken Newtons zitieren; eine Angabe wie N 13 bezieht sich auf Fig. 13 in Newtons Arbeit.

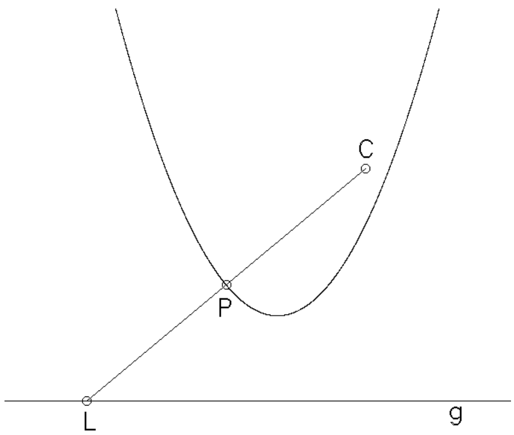
1. Divergente Parabeln

Man spiegele die Gerade $g: y = v$ punktweise an der Normalparabel.

Wie macht man das? Zum Beispiel so:

Von jedem Punkt $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ der Normalparabel wird die Normale mit dem allgemeinen Punkt

$$X(s) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \\ 1 \end{pmatrix}$$

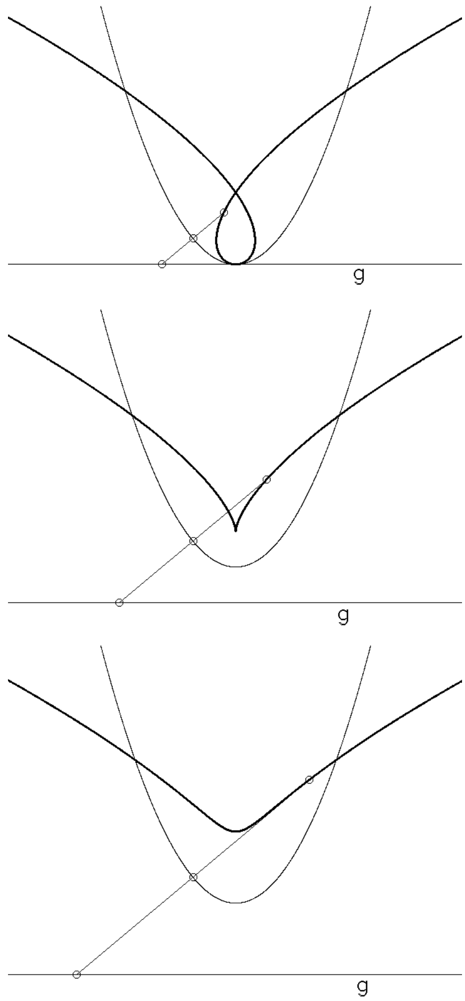


gebildet; diese schneidet die Gerade g für $s = v - t^2$ in $L = X(v - t^2)$ $= \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} + (v - t^2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ v \end{pmatrix}$. Dann gilt für den gespiegelten Punkt C die Beschreibung $C(t) = X(-v + t^2)$, also ist $\boxed{C(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (1 + 2 \cdot v) - 2 \cdot t^3 \\ 2 \cdot t^2 - v \end{pmatrix}}$.

Natürlich gibt es andere Methoden, den Punkt C zu berechnen. Das auf den ersten Blick naheliegende Verfahren, zum Punkt L den zugehörigen Parabelpunkt P zu suchen, führt allerdings auf eine Gleichung 3. Grades (da es von manchen Punkten der Ebene aus drei Normalen auf die Parabel gibt). Schüler sollten erfahren, dass der naive Weg Fallstricke haben kann, man aber durch Umkehr der Blickrichtung (nicht von L ausgehen, sondern von P) trotzdem zu einer einfachen Lösung kommt.

Nebenstehend die Kurven für
$v = 0$ (N 72),
$v = -\frac{1}{2}$ (N 75) und
$v = -1$ (N 73).

Schüler neigen zunächst dazu, nur für einen einzigen Wert von v die Kurve zu besichtigen. Die Erkundung des Formenreichtums durch systematische Variation ist ein Unterrichtsziel, das auch in den Kapiteln 3 bis 8 zum Tragen kommt.



Die Kurven heißen divergente Parabeln; sie zeigen Phänomene, die von Funktionsgraphen oder von quadratischen Kurven nicht bekannt sind. Für $v > -\frac{1}{2}$ gibt es einen Doppelpunkt, der für $v = -\frac{1}{2}$ zu einer Spitze entartet; und für $v < -\frac{1}{2}$ hat die Kurve zwei Wendepunkte.

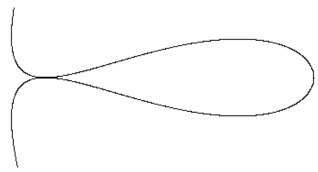
Dies alles lässt sich allein aus den Graphen natürlich nicht sicher erkennen, so dass ein Motiv gegeben ist, solche Punkte analytisch näher zu untersuchen. Dies geschieht in Kapitel 2.

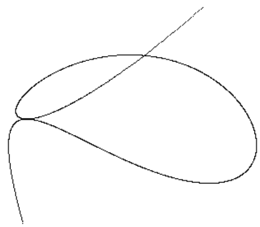
Durch Entparametrisierung bekommt man die Kurvengleichung für $C(t)$, nämlich $\boxed{2 \cdot x^2 = (y+v) \cdot (y-v-1)^2}$. (Dies ist bemerkenswert für den Fall $v < -\frac{1}{2}$: durch die Entparametrisierung ist der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ v+1 \end{pmatrix}$ hinzugekommen.)

2. Doppelpunkte, Wendepunkte und Spitzen

Doppelpunkte:

Wir betrachten die Kurve mit dem allgemeinen Punkt $X(t)$. Ein notwendiges Kriterium für einen Doppelpunkt ist $X(t) = X(s)$ für $t \neq s$. Um zu entscheiden, ob es auch hinreichend ist, muss man sich auf der begrifflichen Ebene darüber einigen, was ein Doppelpunkt überhaupt sein soll. Soll der Kreis mit dem allgemeinen Punkt $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ aus Mehrfachpunkten bestehen oder nicht? Wie ist es, wenn man den Kreis rational parametrisiert, etwa mit $X(t) = \frac{1}{t^2+1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$? Demnach ist die Eigenschaft, Doppelpunkt zu sein, von der gewählten Parametrisierung abhängig! Wie steht es mit Kurven wie den beiden folgenden?





Bei kubischen Kurven kommen solche Graphen nicht vor; ein hinreichendes Kriterium ist daher $X(t) = X(s)$ für $t \neq s$ und $X'(t) \neq X'(s)$.

Krümmung:

Man erhält den zu $X(t)$ gehörigen Krümmungskreismittelpunkt $M(t)$, indem man die Normale zu $X(t)$ mit der Normalen zu $X(t+h)$ schneidet und im Schnittpunkt h gegen Null gehen lässt. Am besten kann man Geraden miteinander schneiden, wenn die eine in Parameterform und die andere in Normalenform gegeben ist. Für die Normalenform braucht man einen zum Tangentenrichtungsvektor $X'(t)$ orthogonalen Vektor; dieser sei mit $X'(t)^{\perp}$ bezeichnet. (Zwar ist $X'(t)^{\perp}$ nicht eindeutig; die damit verbundene Unbestimmtheit wird sich aber wegkürzen.) Für die allgemeinen Punkte Y der erwähnten Normalen gilt dann:

$Y = X(t) + s \cdot X'(t)^{\perp}$ (Normale zu t) und

$Y \cdot X'(t+h) = X(t+h) \cdot X'(t+h)$ (Normale zu $t+h$).

Die Schnittpunktsbestimmung führt auf

$$s = \frac{\left(X(t+h) - X(t)\right) \cdot X'(t+h)}{X'(t)^{\perp} \cdot X'(t+h)} = \frac{\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \cdot X'(t+h)}{X'(t)^{\perp} \cdot \frac{X'(t+h) - X'(t)}{h}};$$ für $h \to 0$ bekommt man den Term $\frac{X'(t) \cdot X'(t)}{X'(t)^{\perp} \cdot X''(t)}$. Daher ist $M(t) = X(t) + \frac{X'(t) \cdot X'(t)}{X'(t)^{\perp} \cdot X''(t)} \cdot X'(t)^{\perp}$; die Krümmung als reziproker Krümmungskreisradius ist $\kappa(t) = \frac{X'(t)^{\perp} \cdot X''(t)}{|X'(t)|^3}$. Bei diesen Betrachtungen ist $X'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vorausgesetzt.

Ist $X'(t)^{\perp} \cdot X''(t) = 0$, so ist zwar der Begriff des Krümmungskreises nicht mehr sinnvoll, wohl aber der Begriff der Krümmung.

Wendepunkte:

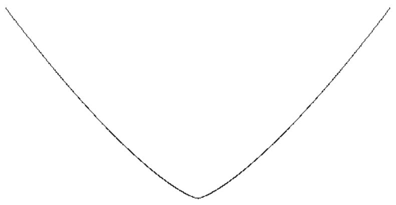
Bei Wendepunkten ändert die Krümmung ihr Vorzeichen. Wendepunkte sind dadurch charakterisiert, dass der Ausdruck $X'(t)^{\perp} \cdot X''(t)$ für den betreffenden Parameter mit Vorzeichenwechsel verschwindet. Die Wendetangente durchsetzt die Kurve.

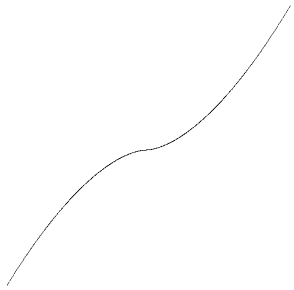
Spitzen:

Spitzen sind Umkehrpunkte, d.h. wenn man sich die Kurve durch die Bewegung eines Punktes entstanden denkt, so kommt die Bewegung bei einer Spitze zu einem

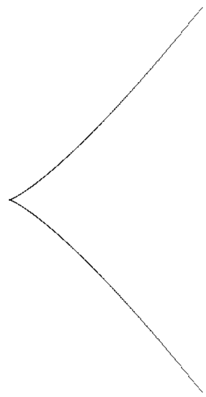
Halt und setzt sich dann in entgegengesetzter Richtung fort. Bei einer Spitze sind die x-Koordinate und die y-Koordinate beide lokal extremal, d.h. es muss $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein. Nun kann man aus dem Verschwinden von $X'(t)$ nicht schließen, dass die Koordinatenfunktionen lokal extremal sind. Die Kurve mit $X(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}$ bei $t = 0$ liefert ein einfaches Gegenbeispiel. (Hier sieht man wieder, dass Umparametrisierungen zwar nicht die Geometrie der Kurve ändern können, u. U. aber durchaus die Analysis der Kurve!)

Komplizierte Gegenbeispiele dafür, dass das notwendige Kriterium die geometrischen Verhältnisse nur unzureichend erfasst, werden durch die Kurven mit den allgemeinen Punkten $\begin{pmatrix} t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} t^3 \\ t^5 \end{pmatrix}$ geliefert:





Ein hinreichende Kriterium ist (wie bei Extremwerten) $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $X''(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dass es nicht notwendig ist, zeigt das Beispiel $\begin{pmatrix} t^4 \\ t^5 \end{pmatrix}$.

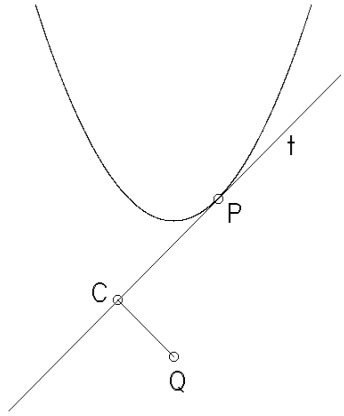


Nach diesen begrifflichen Klärungen lassen sich die Befunde bei den divergenten Parabeln analytisch absichern.

Methodischer Hinweis:
Für die folgenden Kapitel 3 bis 8 bietet sich Gruppenarbeit an; jede Gruppe behandelt parallel den Stoff eines Kapitels oder mehrerer. Natürlich können die Schüler auch eigene andere Vorschläge verwirklichen.

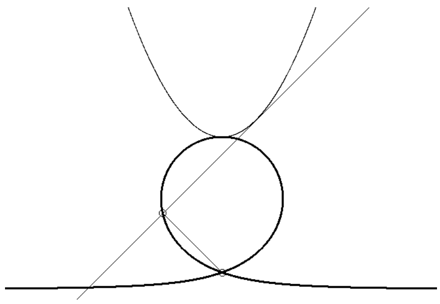
3. Defektive Hyperbeln

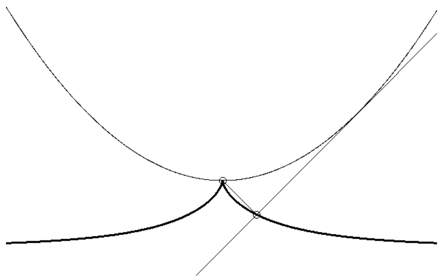
Wir spiegeln den festen Punkt $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ auf der y-Achse an allen Tangenten der Normalparabel. Man bekommt im wesentlichen dieselbe Kurve, wenn man die Lotfußpunkte C von Q auf den Parabeltangenten betrachtet. Die entstehende Kurve heißt <u>Pedalkurve</u> bzgl. Q. Ein mögliches Verfahren ist:
Die (variable) Parabeltangente t im Punkt $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y = 2 \cdot t \cdot x - t^2$; die Normale von Q auf t hat die Gleichung $y = \frac{-1}{2 \cdot t} \cdot x + v$. Es ist



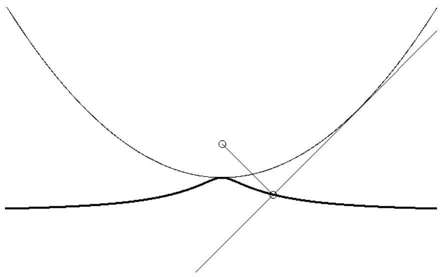
$\boxed{C(t) = \frac{1}{4 \cdot t^2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot t \cdot (t^2 + v) \\ t^2 \cdot (4 \cdot v - 1) \end{pmatrix}}$; dabei muss $v \neq \frac{1}{4}$ sein.

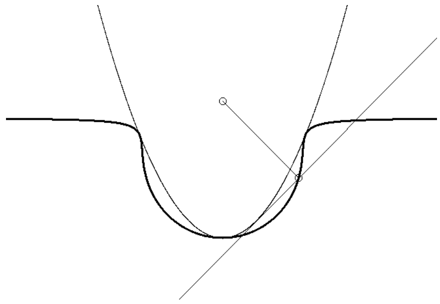
Hier die Kurven für $v = -2$ (N 46) und $v = 0$ (N 47):





Und hier die Kurven für $v = \frac{1}{8}$ (N 49) und $v = 2$ (N 48):





Die Gleichung lautet $\boxed{x^2 \cdot (4 \cdot y - 4 \cdot v + 1) = -4 \cdot y \cdot (y - v)^2}$. (Bei $v > 0$ kommt durch die Entparametrisierung der Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ hinzu.)

Spitzen gibt es genau für $v = 0$, Wendepunkte genau für $v > 0$ und Doppelpunkte genau für $v < 0$.

Für $a \to \pm\infty$ ist die Gerade mit $y = v - \frac{1}{4}$ einzige <u>Asymptote</u>. Diese wird von der Kurve nicht geschnitten.

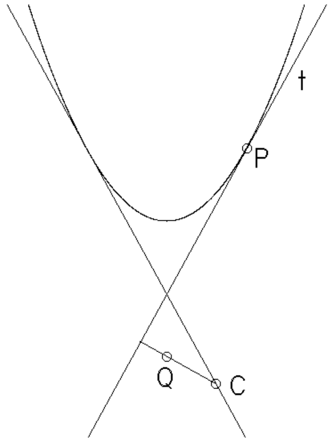
Die Kurven heißen <u>defektive Hyperbeln</u>; der Name „defektiv“ erklärt sich daraus, dass diese kubische Kurve nur eine einzige Asymptote hat, während eine quadratische Hyperbel deren zwei aufweist. Im folgenden Kapitel geht es um Kurven mit drei Asymptoten, die deshalb „redundant“ heißen.

Weiterführende Frage:

Offensichtlich berühren die Pedalkurven immer die Ausgangsparabel. Ist das wirklich immer der Fall, und welcher Art ist die Berührung?

4. Redundante Hyperbeln

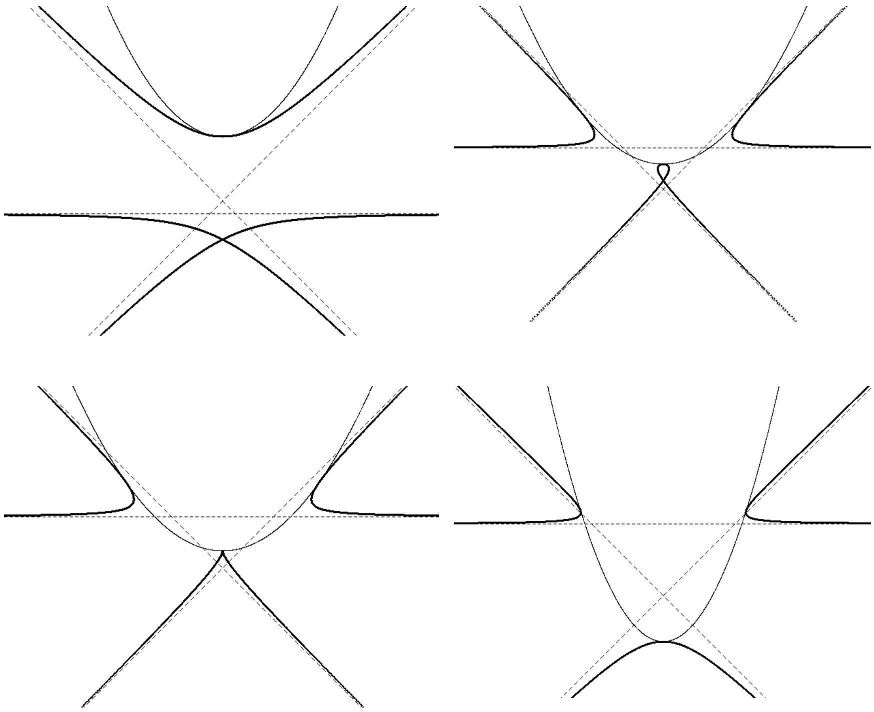
Die Pedalkurvenkonstruktion aus Kapitel 3 wird leicht abgewandelt, indem das Lot auf eine Parabeltangente geschnitten wird mit der jeweils an der Parabelachse gespiegelten Tangente.



Man erhält $\boxed{C(t) = \frac{1}{4 \cdot t^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \cdot \left(t^2 + v\right) \\ t^2 \cdot \left(4 \cdot v + 1\right) \end{pmatrix}}$.

Damit sich überhaupt ein Schnittpunkt ergibt, muss $t \neq \pm\frac{1}{2}$ sein. Damit sich eine Kurve ergibt, muss $v \neq -\frac{1}{4}$ sein.

Nachfolgend die Kurven samt Asymptoten, und zwar oben für $v = -1$ (N 24) und $v = -\frac{1}{8}$ (N 18) sowie unten für $v = 0$ (N 19) und $v = 2$ (N 21).



Man erhält die Newtonbilder N 36 für $v = -\frac{3}{4}$, N 25 für $v = -\frac{1}{2}$ und N 20 für $v = \frac{1}{4}$.

Die Gleichung lautet $\boxed{x^2 \cdot (4 \cdot y - 4 \cdot v - 1) = 4 \cdot y \cdot (y - v)^2}$.

(Für $v = -\frac{1}{4}$ gibt es ein Problem: Die Parameterform beschreibt eine Gerade, die Gleichung aber zusätzlich ein Geradenpaar. Ferner ist durch die Entparametrisierung für $v > 0$ der Punkt $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ als Kurvenpunkt hinzugekommen.)

Spitzen gibt es genau für $v = 0$, Wendepunkte genau für $v > 0$ und Doppelpunkte genau für $v < 0$.

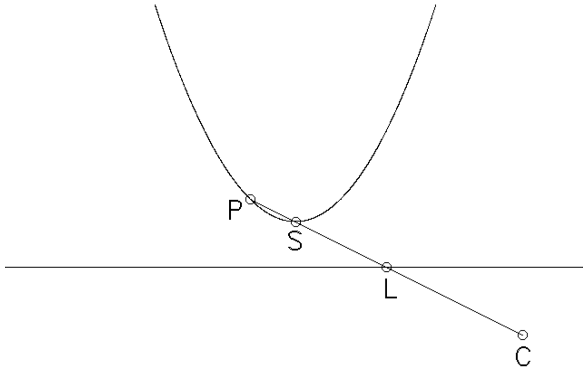
Die Kurven heißen <u>redundante Hyperbeln</u>; sie haben <u>drei Asymptoten</u> (daher der Name): Für $t \to \pm\infty$ ist die Gerade mit $y = v + \frac{1}{4}$ Asymptote; für $t \to \pm\frac{1}{2}$ ist die Gerade mit $y = \mp x + \left(\frac{v}{2} - \frac{1}{8}\right)$ Asymptote. Letzteres wird klar, wenn man den allgemeinen Punkt der Asymptote als $\frac{1}{4 \cdot t^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot t \cdot (t^2 + v) \\ \pm 2 \cdot t \cdot (t^2 + v) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v/2 - 1/8 \end{pmatrix}$ schreibt.

Weiterführende Fragen:

Unter welchen Bedingungen liegt die Kurve oberhalb der waagerechten Asymptote?
Unter welchen Bedingungen schneiden sich die schrägen Asymptoten oberhalb der waagerechten Asymptote?
In welchem Quadranten nähert sich die Kurve für $t \to \frac{1}{2}$ der schrägen Asymptote an?
Unter welchen Bedingungen liegt die Kurve oberhalb der schrägen Asymptote?
Was geschieht bei $v = \frac{3}{4}$?
Welcher Art ist die Berührung von Parabel und redundanter Hyperbel?

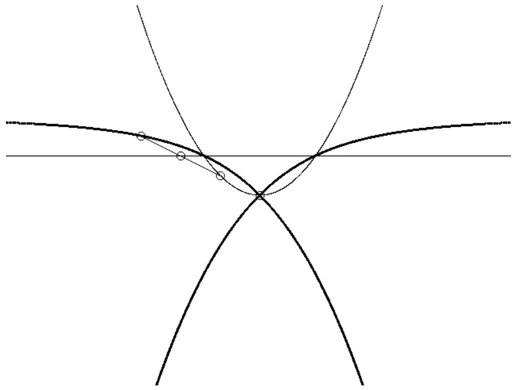
5. Parabolische Hyperbeln

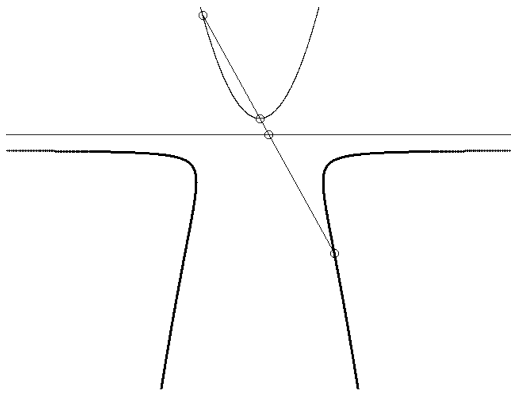
Man spiegele die Normalparabel an einer festen Geraden entlang Scheitelpunktsehnen. Die Gerade durch $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und durch $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ schneidet die vorgegebene Gerade mit $y = v$ im Punkt



$L = \begin{pmatrix} v/t \\ v \end{pmatrix}$. Spiegelt man P an L, so erhält man den Kurvenpunkt $\boxed{C(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot v/t - t \\ 2 \cdot v - t^2 \end{pmatrix}}$. Dabei muss $v \neq 0$ sein.

Nebenstehend die Kurven für $v = \frac{1}{2}$ (N 58) und für $v = -\frac{1}{2}$ (N 57).





Die Gleichung lautet $\boxed{x^2 \cdot (2 \cdot v - y) = y^2}$.

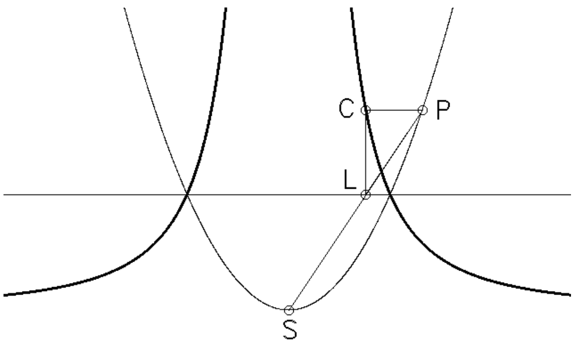
Spitzen gibt es nie, Wendepunkte genau für $v < 0$ und Doppelpunkte genau für $v > 0$. Doppelpunkte haben keine Schleifen zur Folge.

Wegen $\lim\limits_{t \to 0} C(a) = \begin{pmatrix} \pm\infty \\ 2 \cdot v \end{pmatrix}$ ist die Gerade mit $y = 2 \cdot v$ Asymptote.

Für $t \to \pm\infty$ ist die gespiegelte und verschobene Parabel mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} -t \\ -t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot v \end{pmatrix}$ Asymptote. Aus diesem Grund heißen diese Kurven dann parabolische Hyperbeln.

6. Kubische Hyperbeln

Der Punkt $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ durchlaufe die Parabel mit dem Scheitelpunkt $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Gerade SP schneidet die vorgegebene Gerade mit der Gleichung $y = v$ im Punkt $L = \begin{pmatrix} v/t \\ t \end{pmatrix}$.



Der zugehörige Punkt $\boxed{C(t) = \begin{pmatrix} v/t \\ t^2 \end{pmatrix}}$ liegt auf der Hyperbel (N 69) mit der Gleichung $\boxed{y = \frac{v^2}{x^2}}$. Natürlich kann v auch negativ sein, aber nicht Null.

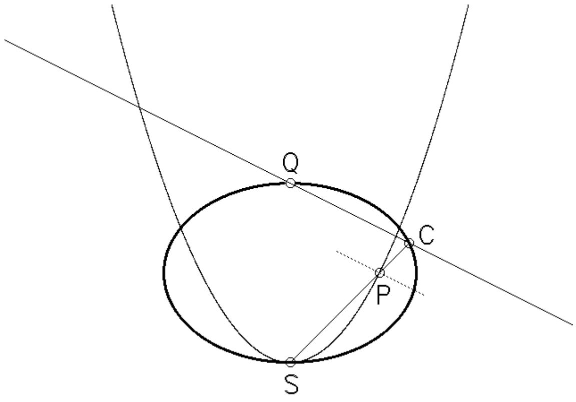
Die Kurven heißen kubische Hyperbeln (aus Klasse 10 bekannt).

Die hier beschriebene Zuordnung $P \to C$ heißt nach Newton Hyperbolismus (Näheres in Gomes Teixeira I, 99). Der von v abhängige Hyperbolismus ordnet jedem Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ den Bildpunkt $\begin{pmatrix} v \cdot x / y \\ y \end{pmatrix}$ zu. Eine kubische Hyperbel ist demnach ein Hyperbolismus einer Parabel.

7. Kegelschnitte

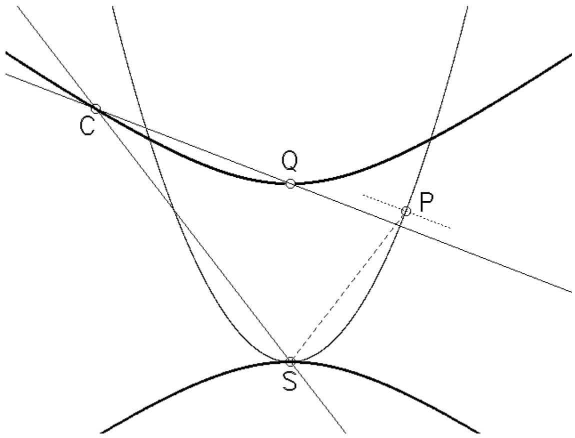
Kegelschnitte sind zwar keine kubischen Kurven, dienen aber zur Abrundung des Bildes. Zudem werden sie im folgenden Kapitel benötigt.

Ellipsen: Der Punkt $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ durchlaufe die Parabel mit dem Scheitelpunkt $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Punkt $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ sei fest auf der y-Achse. Die Parallele der Kurvennormalen in P durch Q



schneidet die Gerade SP in C. Es ist $\boxed{C(t) = \frac{2 \cdot t \cdot v}{2 \cdot t^2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}}$ mit der Kurvengleichung $\boxed{x^2 + 2 \cdot \left(y - \frac{v}{2} \right)^2 = \frac{v^2}{2}}$. Natürlich kann v auch negativ sein, aber nicht Null.

Hyperbeln: Eine leichte Modifikation der obigen Konstruktion führt zu einer Hyperbel, die dieselbe Symmetrieachse wie die Parabel hat:
Die Parallele zur Kurvennormale wird nicht mit SP geschnitten, sondern mit derjenigen Geraden, die entsteht, wenn man SP an der Parabelachse spiegelt. Diese Gerade hat



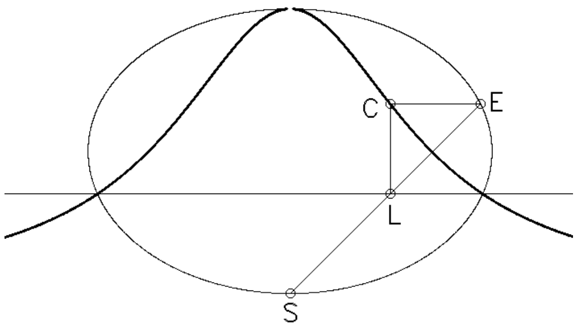
$y = -t \cdot x$ als Gleichung; der Kurvenpunkt ist nunmehr $\boxed{C(t) = \frac{2 \cdot t \cdot v}{2 \cdot t^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}}$ mit der Kurvengleichung $\boxed{-x^2 + 2 \cdot \left(y - \frac{v}{2} \right)^2 = \frac{v^2}{2}}$. Wiederum kann v auch negativ sein, aber nicht Null.

8. Hyperbolismen von Ellipse und Hyperbel

Wir haben gelernt, wie man eine Ellipse oder eine Hyperbel aus einer Parabel konstruieren kann. Auf die neuen Punkte lassen sich nun Hyperbolismen anwenden; man gelangt dadurch zu neuen kubischen Kurven.

Hyperbolismen von Ellipsen: Der Punkt $E(t) = \frac{2 \cdot t \cdot v}{2 \cdot t^2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ durchlaufe die Ellipse. Die vorzugebende Gerade habe die Gleichung $y = w$.

Der Bildpunkt (N 67) von E ist

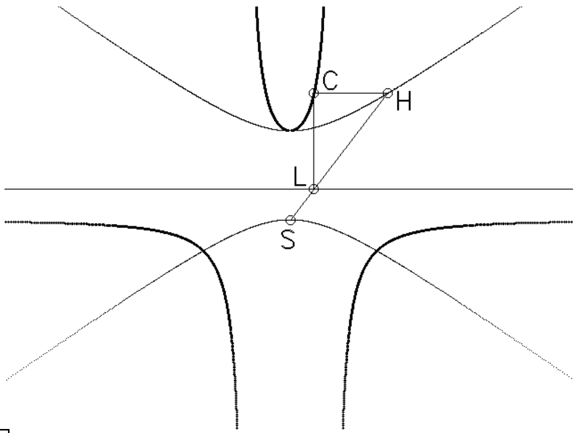


$\boxed{C(t) = \begin{pmatrix} w/t \\ 2 \cdot t^2 \cdot v/(2 \cdot t^2 + 1) \end{pmatrix}}$; die Kurvengleichung lautet $\boxed{x^2 \cdot y = 2 \cdot w^2 \cdot (v - y)}$.

Die Kurve hat zwei Wendepunkte und als Asymptote für $a \to 0$ die Gerade mit $y = 0$.

Hyperbolismen von Hyperbeln: Der Punkt $H(t) = \frac{2 \cdot t \cdot v}{2 \cdot t^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ durchlaufe die Hyperbel. Die vorzugebende Gerade habe wieder die Gleichung $y = w$.

Der Bildpunkt (N 64) von H ist



$\boxed{C(t) = \begin{pmatrix} -w/t \\ 2 \cdot t^2 \cdot v/(2 \cdot t^2 - 1) \end{pmatrix}}$; die Kurvengleichung ist $\boxed{x^2 \cdot y = 2 \cdot w^2 \cdot (y - v)}$.

Die Kurve hat keine Wendepunkte und drei Asymptoten, nämlich für $a \to 0$ die Gerade mit $y = 0$ und für $a \to \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ jeweils die Gerade mit $x = \mp w \cdot \sqrt{2}$.

9. Zusammenfassung

Kurvenpunkte und Gleichungen wirken noch recht unübersichtlich und wenig einheitlich. Durch affine Variablen- und Parametertransformationen lässt sich dieser Zustand verbessern. Natürlich kann man diese erst finden, wenn man schon mehrere Typen kubischer Kurven kennengelernt hat. Dabei ist es keineswegs eindeutig, was man unter einer „optimalen Form“ von Kurvenpunkt oder Gleichung verstehen soll.

Das jetzt verfolgte Unterrichtsziel kann man mit „Übersicht gewinnen“ bezeichnen. Wir werden diese Übersicht in zwei Stufen erreichen (hier und in den beiden nächsten Kapiteln).

Zunächst wird man die Parametereinteilung vereinheitlichen wollen und bei der divergenten Parabel $1+2\cdot v=-w$ setzen. Dann gilt:

$$\text{Spitze} \Leftrightarrow v=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow w=0$$

$$\text{Doppelpunkt} \Leftrightarrow v>-\frac{1}{2} \Leftrightarrow w<0$$

$$\text{Wendepunkte} \Leftrightarrow v<-\frac{1}{2} \Leftrightarrow w>0$$

Die Berechnung des Kurvenpunktes gestaltet sich nun noch einfacher, wenn man $1+2\cdot v=-2\cdot w$ setzt; an den obigen Äquivalenzen ändert sich dadurch nichts.

Der Kurvenpunkt ist nun $C(t)=\begin{pmatrix} t\cdot(-2\cdot w)-2\cdot t^3 \\ 2\cdot t^2+w+1/2 \end{pmatrix}$.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man die Kurve streckt, spiegelt oder verschiebt. Es ist eine sinnvolle Vereinbarung, zu sagen, dass sich dadurch die Gestalt der Kurve nicht wesentlich ändert. Beim Kreis wäre diese Vereinbarung in Bezug auf Streckungen sinnlos, aber bei allen anderen bekannten Kurven ist man im Unterricht auch so vorgegangen. Eine Sinuskurve bleibt eine Sinuskurve, auch wenn man sie streckt, spiegelt oder verschiebt; dass sie eventuell eine Cosinuskurve wird, ändert nichts an dem Tatbestand.

Die divergente Parabel wird man zum Zwecke der Vereinfachung vielleicht in y-Richtung verschieben (Ziel: $\begin{pmatrix} t\cdot(-2\cdot w)-2\cdot t^3 \\ 2\cdot t^2+2\cdot w \end{pmatrix}$), dann in beide Achsenrichtungen strecken (Ziel: $\begin{pmatrix} t\cdot w+t^3 \\ t^2+w \end{pmatrix}$). Man erhält für die divergente Parabel dadurch die einfache Formel $C(t)=(t^2+w)\cdot\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entsprechend kann man für die anderen kubischen Kurven vorgehen und bekommt nach geeigneten affinen Variablen- und Parametertransformationen etwa:

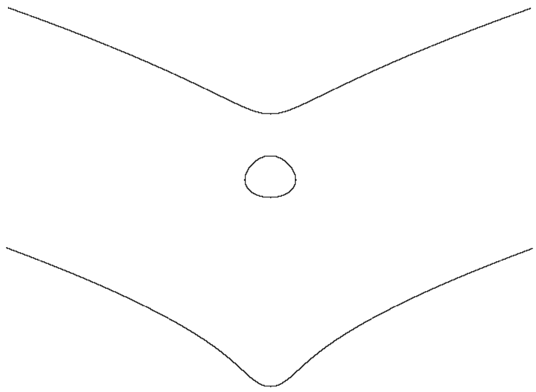
divergente Parabel	$C = \left(t^2 + w\right) \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$	$x^2 = y^2 \cdot (y - w)$	$w < 0$ DP $w = 0$ Sp $w > 0$ WPe
defektive Hyperbel $w \neq 1$	$C = \frac{t^2 + w}{t^2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$	$x^2 \cdot (y - 1) = -y^2 \cdot (y - w)$	$w < 0$ DP $w = 0$ Sp $w > 0$ WPe
redundante Hyperbel $w \neq -1$	$C = \frac{t^2 + w}{t^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$	$x^2 \cdot (y - 1) = y^2 \cdot (y + w)$	$w < 0$ DP $w = 0$ Sp $w > 0$ WPe
parabolische Hyperbel $w \neq 0$	$C = \frac{t^2 + w}{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$	$x^2 \cdot (y - w) = y^2$	$w < 0$ DP $w > 0$ WPe
Hyperbolismus	$C = \begin{pmatrix} 1/t \\ t^2 /(\sigma \cdot t^2 + 1) \end{pmatrix}$	$x^2 \cdot y = 1 - \sigma \cdot y$	$\sigma > 0$ WPe

Übrigens: Es gibt noch zwei weitere Beispiele von divergenten Parabeln, die aber nicht rational parametrisierbar sind. Diese haben etwa die Gleichungen

$x^2 = y \cdot (y^2 - 1)$ (N 70 / 71)

und

$x^2 = y \cdot (y^2 + 1)$ (N 74).



Die Fermat-Kurve ($x^3 + y^3 = 1$) ist eine (nicht rational parametrisierbare) defektive Hyperbel, wie man erkennt, wenn man sie um 45º dreht. Die Kurvengleichung lautet dann $3 \cdot x^2 \cdot y = -y^3 + \sqrt{2}$.

10. Räumliche Bilder

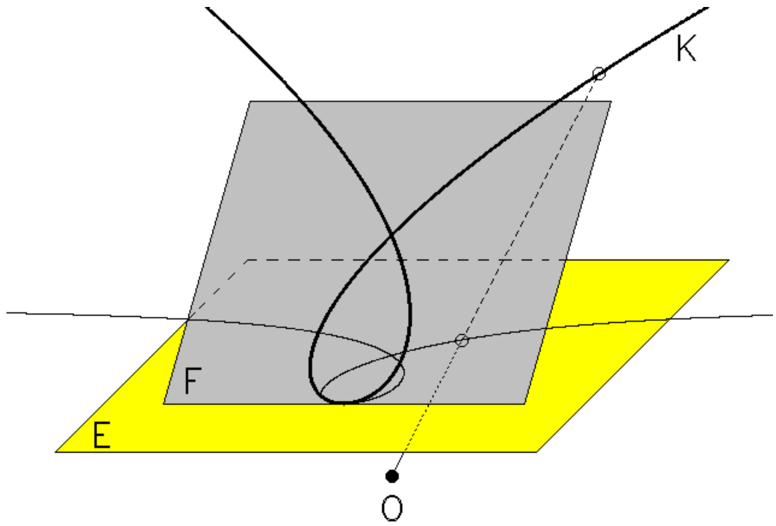
Newton schreibt auf Seite 635: „And just as the circle by projecting its shadows generates all conics, so the five divergent parabolas by their shadows generate and exhibit all other curves ...“

Dies ist mit Hilfe des Computers viel besser zu sehen als mit realen Schatten.

Defektive Hyperbeln:

Ein allgemeiner Punkt einer defektiven Hyperbel ist $C(t)=\frac{t^2+w}{t^2+1}\cdot\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$ mit $w\neq 1$. Man bekommt ihn auch als Schnittpunkt der Ebene $E:\ z=1$ mit der Verbindungsgeraden von $0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ zu $R(t):=\begin{pmatrix}t\cdot(t^2+w)\\t^2+w\\t^2+1\end{pmatrix}$. Schreibt man

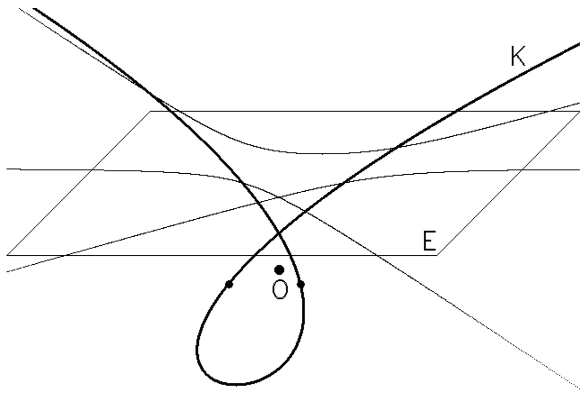
$R(t)=\begin{pmatrix}0\\w\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}w\\0\\0\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+t^3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, so sieht man, dass R eine <u>ebene Kurve</u> K beschreibt. Die Kurve K liegt in der Ebene $F:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=w-1$; wegen $w\neq 1$ geht F nicht durch den Ursprung.



Führt man in F ein lokales u-v-Koordinatensystem ein, dessen u-Achse in Richtung von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und dessen v-Achse in Richtung von $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ zeigt mit $\begin{pmatrix}0\\w\\1\end{pmatrix}$ als lokalem Ursprung, so ist $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\cdot w+t^3\\t^2\end{pmatrix}$ ein allgemeiner Punkt von K mit der Kurvengleichung $u^2=v\cdot(v+w)^2$. Es handelt sich daher bei K um eine im Raum liegende divergente Parabel. Diese liegt immer unterhalb von E. (Die obige Graphik zeigt die Verhältnisse bei einer Kurve mit Doppelpunkt.)

Redundante Hyperbeln:

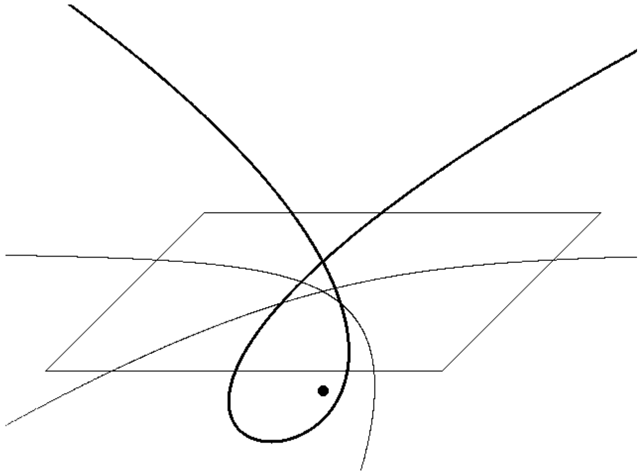
Hier ist die Rechnung ganz analog; die Punkte auf der divergenten Parabel mit $z=0$ sind durch einen dicken Punkt gekennzeichnet.



Parabolische Hyperbeln:

Ein allgemeiner Punkt einer parabolischen Hyperbel ist $C(t)=\frac{t^2+w}{t}\cdot\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$ mit $w\neq 0$. Hier beschreibt $R(t)=\begin{pmatrix}t^2+w\\t\cdot(t^2+w)\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\w\\1\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t^3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ keine ebene Kurve mehr!

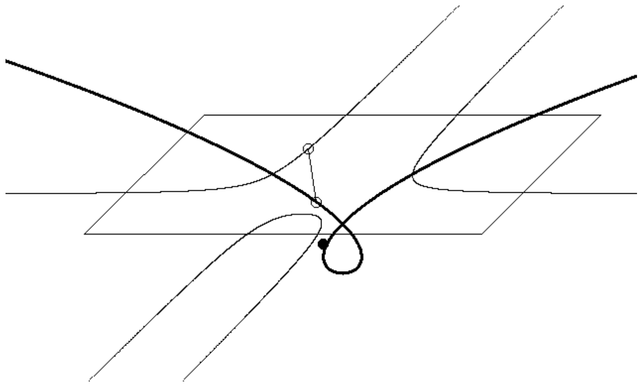
Betrachtet man statt dessen $D(t):=C\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+w\cdot t^2}{t^2}\cdot\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$, so beschreibt der zugehörige Punkt $R(t)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}0\\w\\1\end{pmatrix}+t^3\cdot\begin{pmatrix}w\\0\\0\end{pmatrix}$ wiederum eine ebene divergente Parabel (siehe nächste Seite oben).



Hyperbolismen:

Hier schreiben wir wieder $D(t) := C\begin{pmatrix}\frac{1}{t}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma + t^2} \cdot \begin{pmatrix}\sigma \cdot t + t^3 \\ 1\end{pmatrix}$ mit

$R(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\\sigma\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}\sigma\\0\\0\end{pmatrix} + t^2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t^3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und erhalten so eine divergente Parabel in der Ebene $F:\ y = 1$:



Damit haben wir alle aufgetretenen kubischen Kurven als Zentralprojektionen von divergenten Parabeln deuten können. Newtons Leistung war allerdings wesentlich größer, da er alle kubischen Kurven behandelt hat, nicht nur die rational parametrisierbaren.

11. Zweite Zusammenfassung

Die Überlegungen des letzten Kapitels führen zu einer noch übersichtlicheren Form der Kurvenpunkte:

Eine <u>divergente Parabel</u> hat den allgemeinen Punkt $\boxed{C(t) = (t^2 + w) \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}$ und die Gleichung $\boxed{x^2 = y^2 \cdot (y - w)}$.

Eine $\left\{\begin{matrix} \text{defektive} \\ \text{parabolische} \\ \text{redundante} \end{matrix}\right\}$ <u>Hyperbel</u> hat den allgemeinen Punkt $\boxed{C(t) = \frac{t^2 + w}{t^2 + \varepsilon} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}$ für $\left\{\begin{matrix} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon = 0 \\ \varepsilon < 0 \end{matrix}\right\}$ mit $w \neq \varepsilon$. Die Gleichung lautet $\boxed{x^2 \cdot (y - 1) = y^2 \cdot (w - \varepsilon \cdot y)}$.

Für alle diese Hyperbeln sowie für die divergenten Parabeln gilt: Für $w < 0$ gibt es einen Doppelpunkt, für $w = 0$ eine Spitze und für $w > 0$ zwei Wendepunkte.

Nebenbei: Kurven mit dem allgemeinen Punkt $C(t) = \frac{1}{t^2 + \varepsilon} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ würden zwar auch in das Schema passen, stellen aber keine kubischen Kurven dar, sondern Kegelschnitte, und zwar $\left\{\begin{matrix} \text{Ellipsen} \\ \text{Parabeln} \\ \text{Hyperbeln} \end{matrix}\right\}$ für $\left\{\begin{matrix} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon = 0 \\ \varepsilon < 0 \end{matrix}\right\}$. (Man bekommt diese Form des Punktes, wenn man bei den Formeln in Kapitel 7 jeweils t durch $\frac{1}{t}$ ersetzt.)

Die <u>Hyperbolismen</u> mit dem allgemeinen Punkt $\boxed{C(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1/(t^2 + \varepsilon) \end{pmatrix}}$ und der Gleichung $\boxed{x^2 \cdot (y - 1) = 1 + \varepsilon - \varepsilon \cdot y}$ erhält man aus dem Kegelschnitt-Punkt $\frac{1}{t^2 + \varepsilon} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ durch Anwendung der Abbildung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x / y \\ y \end{pmatrix}$ (man vergleiche Kapitel 6). Für $\left\{\begin{matrix} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon = 0 \\ \varepsilon < 0 \end{matrix}\right\}$ rührt der Hyperbolismus von einer $\left\{\begin{matrix} \text{Ellipse} \\ \text{Parabel} \\ \text{Hyperbel} \end{matrix}\right\}$ her.

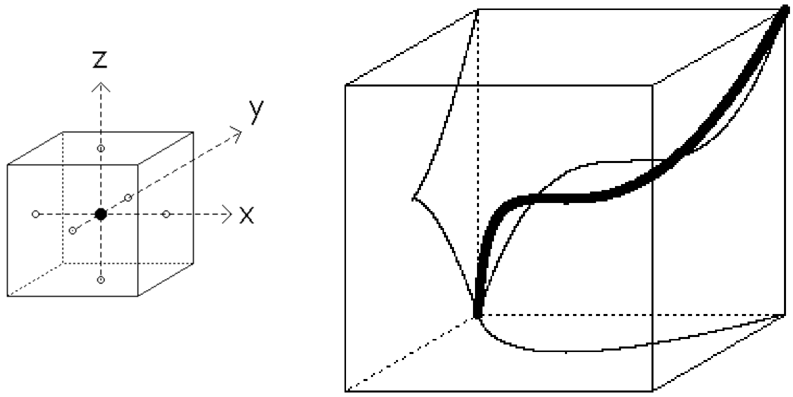
Weiterführende Frage:

Wir haben in Kapitel 10 die $\left\{\begin{matrix}\text{defektive}\\ \text{parabolische}\\ \text{redundante}\end{matrix}\right\}$ Hyperbel als Zentralprojektion der divergenten Parabel mit dem allgemeinen Punkt $R(t)=\begin{pmatrix} t^3+w\cdot t\\ t^2+w\\ t^2+\varepsilon\end{pmatrix}$ auf die Ebene mit der Gleichung $z=1$ gewonnen. Was passiert, wenn man $R(t)$ auf die Ebene mit der Gleichung $y=1$ projiziert?

12. Divergente Parabeln als Parallelprojektionen

Auch die divergenten Parabeln aus Kapitel 1 lassen sich unter einem einheitlichen Gesichtspunkt sehen.

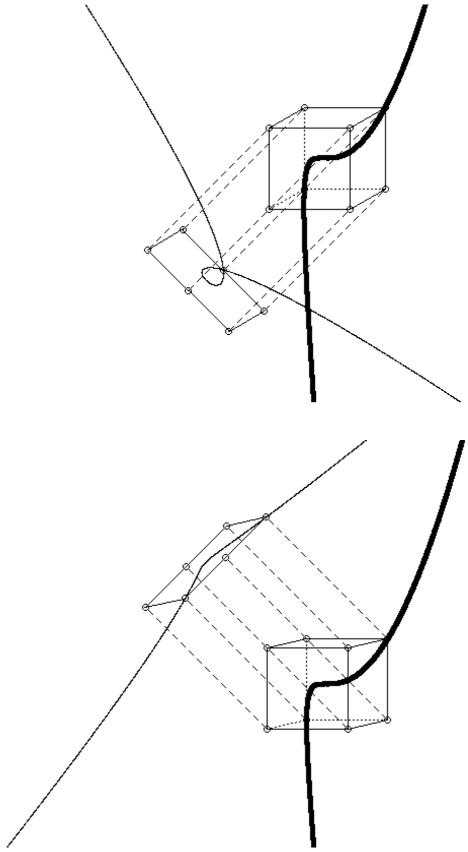
Dazu gehen wir von der Raumkurve mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} t\\ t^2\\ t^3\end{pmatrix}$ aus.



Projiziert man die Raumkurve parallel auf die Koordinatenebenen, erhält man unter anderen eine divergente Parabel mit einer Spitze.

Andere Parallelprojektionen liefern die beiden anderen Typen divergenter Parabeln.

Das rechnet man leicht nach: Die Projektionsrichtung sei $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -w \end{pmatrix}$ (bei den Bildern ist oben $w = -1$ und unten $w = 1$), und die Projektionsebene sei etwa durch $X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -w \end{pmatrix} = 0$ beschrieben. Dann wird jeder Punkt $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ der Raumkurve auf den Punkt $Q = \frac{1}{w^2+1} \cdot \begin{pmatrix} w^2 \cdot t + w \cdot t^3 \\ w^2 \cdot t^2 + t^2 \\ w \cdot t + t^3 \end{pmatrix}$ projiziert. Führt man auf der Projektionsebene das lokale orthogonale Koordinatensystem mit den Basisvektoren $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



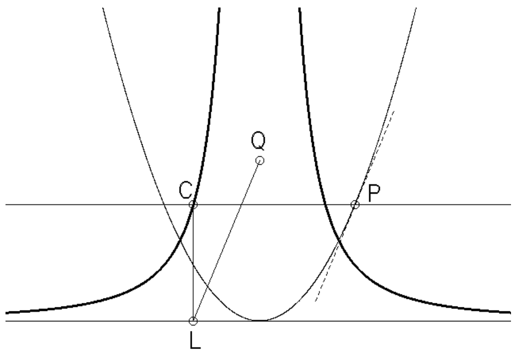
und $V = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein, so gilt $Q = t^2 \cdot U + \frac{t^3 + w \cdot t}{w^2+1} \cdot V$. Q beschreibt also eine divergente Parabel.

13. Alternative Erzeugungen für die Klausur

Divergente Parabeln (Loria II, 338): P durchlaufe die Normalparabel, und Q sei ein fester Punkt der y-Achse. Die Parallele der Kurvennormalen zu P durch Q schneidet die Parallele zur x-Achse durch P in C.

Parabolische Hyperbeln (Loria II, 338): P durchlaufe die Normalparabel, und Q sei ein fester Punkt der y-Achse. Die Parallele der Kurventangenten zu P durch Q schneidet die Parallele zur x-Achse durch P in C.

Kubische Hyperbeln (Loria II, 335):
Der Punkt P durchlaufe die Parabel, und Q sei ein fester Punkt der y-Achse. Die Parallele zur Kurventangente zu P durch Q schneidet die x-Achse in L. Dann sei C so wie in der Skizze.



Literatur

Gomes Teixeira, Francisco: Traité des courbes spéciales remarquables I, II. Coimbra 1908; Paris 1995.

Loria, Gino: Spezielle ebene Kurven I, II. Leipzig / Berlin 1910 / 1911.

Newton, Isaac: Improved enumeration of the component species of the general cubic curve (1695).
In: The mathematical papers of Isaac Newton. VII. Cambridge 1976.