

# Kachelungen

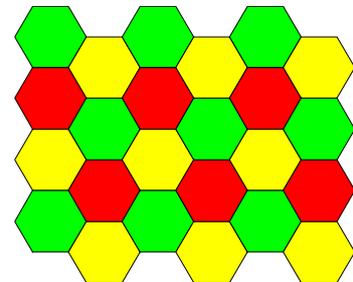
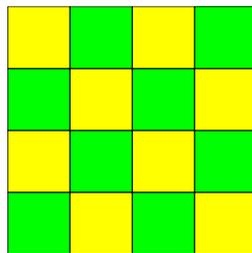
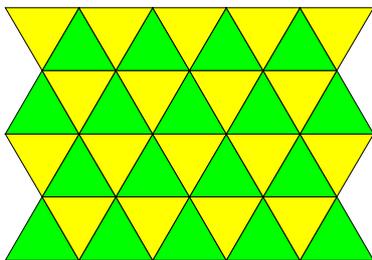
## Inhalt

- 1. Kachelungen mit n-Ecken ..... 1
- 2. Lückenlose Umrandungen von n-Ecken ..... 2
- 3. Einheitliche Umrandungen als solche ..... 3

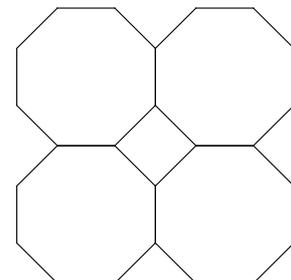
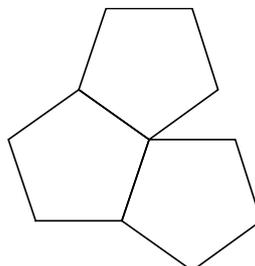
Bis auf den letzten Abschnitt sind alle n-Ecke in diesem Text als regelmäßig vorausgesetzt.

### 1. Kachelungen mit n-Ecken

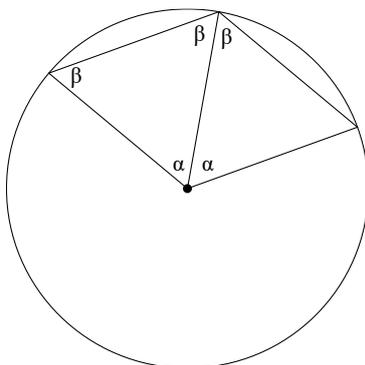
Man kann die Ebene mit 3-Ecken, 4-Ecken oder 6-Ecken kacheln.



Mit 5-Ecken oder 8-Ecken gelingt das nicht.



Die führt zu der Frage: Mit welchen n-Ecken kann man kacheln?



Ein n-Eck besteht aus n Sektoren mit dem Mittelpunktswinkel  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ . Der Randwinkel des n-Ecks beträgt  $2 \cdot \beta = 180^\circ - \alpha$ .

Wenn k Kacheln aneinander stoßen, muss sein:

$$360^\circ = k \cdot (2 \cdot \beta) = k \cdot \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right)$$

$$2 = k \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$(n-2) \cdot (k-2) = 4$$

$$(n-2) \cdot (k-2) = 4$$

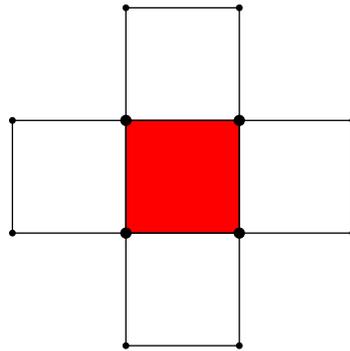
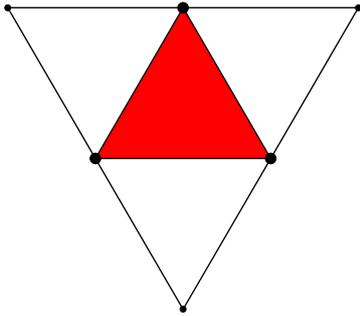
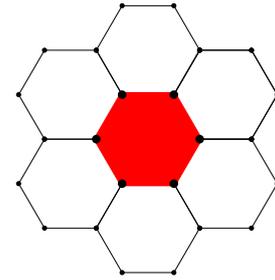
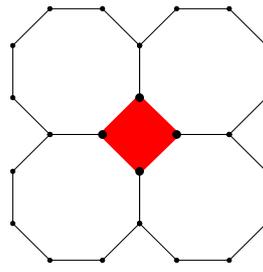
1 · 4      n = 3   k = 6

4 · 1      n = 6   k = 3

2 · 2      n = 4   k = 4

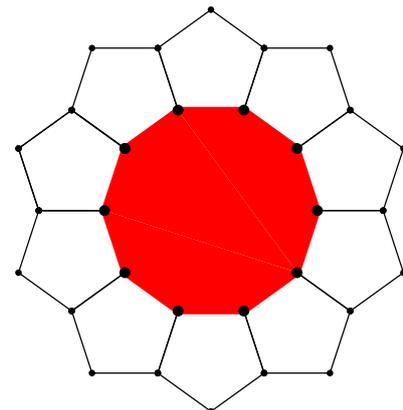
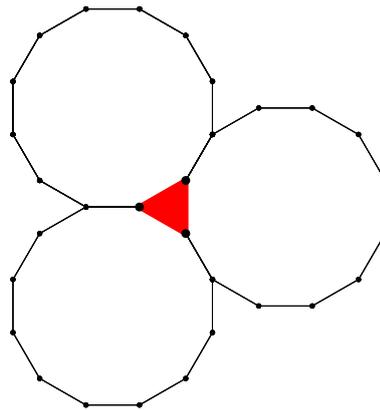
## 2. Lückenlose Umrandungen von n-Ecken<sup>1</sup>

Oben hat man gesehen, dass ein 4-Eck mit 8-Ecken lückenlos umrandet werden kann oder dass ein 6-Eck mit 6-Ecken lückenlos umrandet werden kann.



Umrandungen wie die beiden links gelten **nicht** als lückenlos, weil die Eckpunkte nicht umrandet sind.

Es ist auch möglich, ein 3-Eck mit 12-Ecken vollständig zu umranden oder ein 10-Eck mit 5-Ecken.

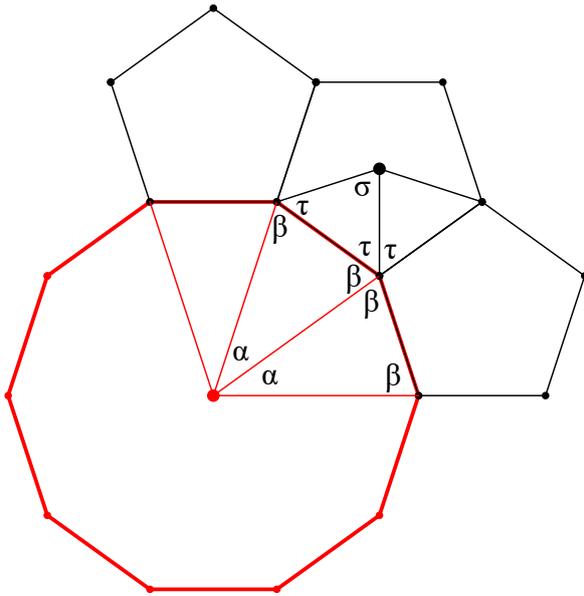


Dies führt zu der Frage: Welche n-Ecke können von k-Ecken lückenlos umrandet werden?

Zum roten n-Eck gehört der Mittelpunktswinkel  $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ , zum weißen k-Eck gehört der

Mittelpunktswinkel  $\sigma = \frac{360^\circ}{k}$ .

<sup>1</sup> angeregt durch Hans Walser (1923): Vielecke einpacken. In: Der Mathematikunterricht **69**(3), S. 10-17. Die Vorgehensweise hier ist anders.



Mit  $2 \cdot \beta = 180^\circ - \alpha$  und  $2 \cdot \tau = 180^\circ - \sigma$  ist  
 $180^\circ = \beta + 2 \cdot \tau$

$$= 90^\circ - \frac{180^\circ}{n} + 180^\circ - \frac{360^\circ}{k}$$

Das führt auf

$$k = \frac{4 \cdot n}{n-2}.$$

Setzt man  $j = n-2$ , ist  $n = j+2$  und

$$k = \frac{4 \cdot (j+2)}{j} = 4 + \frac{8}{j}.$$

Da  $k$  ganzzahlig sein muss, kann  $j$  nur die Werte 1, 2, 4, 8 annehmen.

Für  $j=1$  ist  $n=3$  und  $k=12$ .

Für  $j=2$  ist  $n=4$  und  $k=8$ .

Für  $j=4$  ist  $n=6$  und  $k=6$ .

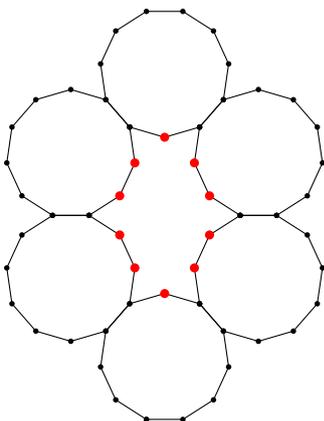
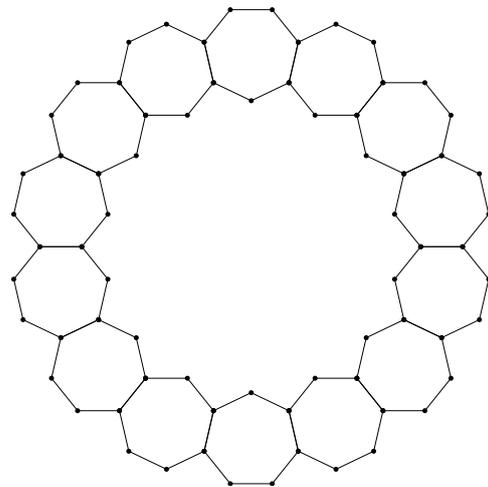
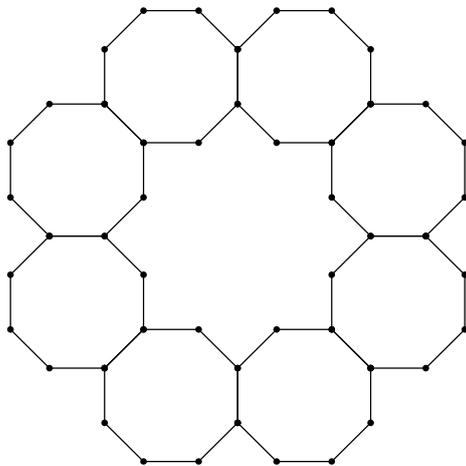
Für  $j=8$  ist  $n=10$  und  $k=5$ .

Die gefundenen Umrandungs-Möglichkeiten sind also die einzigen.

### 3. Einheitliche Umrandungen als solche

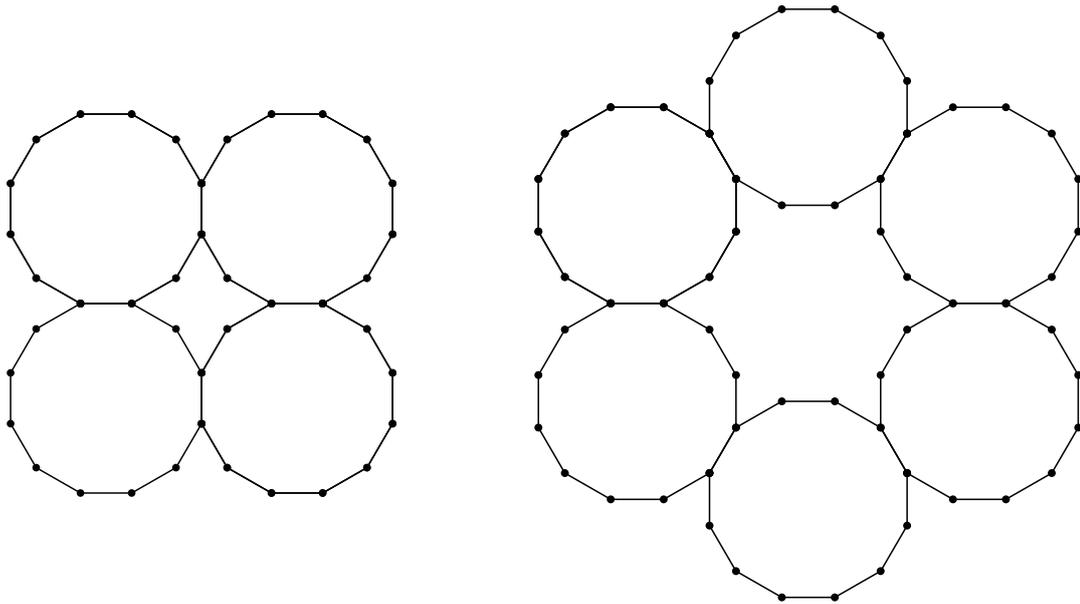
Regelmäßige 8-Ecke können ein unregelmäßiges  $n$ -Eck vollständig in einheitlicher Weise umranden.  
 (Das umrandete  $n$ -Eck ist unregelmäßig, da nicht alle Randwinkel gleiche Größe haben.)

Auch regelmäßige 7-Ecke eignen sich als Kacheln für eine einheitliche Umrandung.

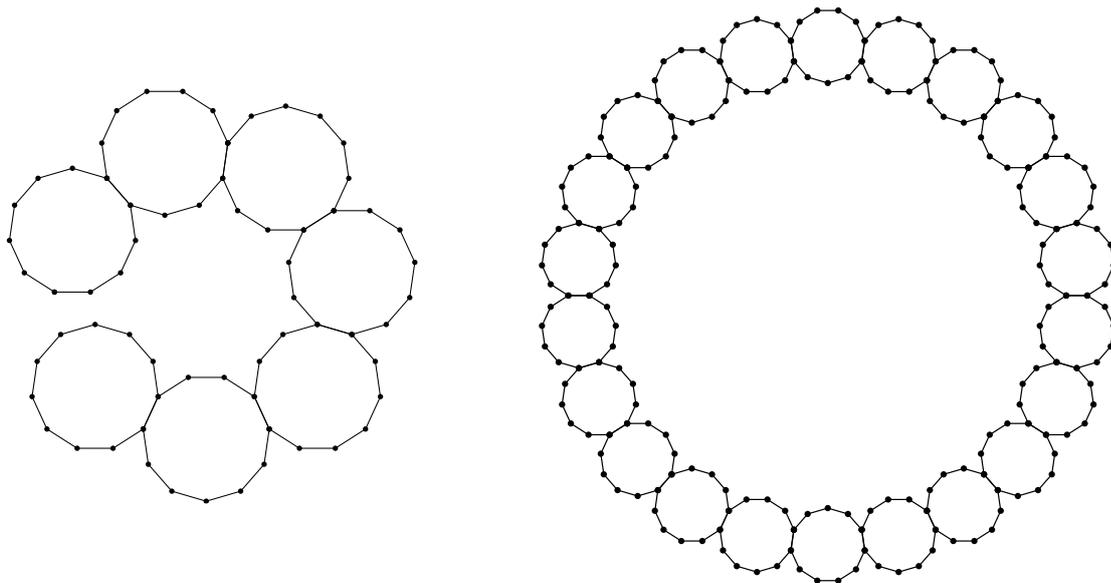


Links sieht man eine vollständige Umrandung, die jedoch **nicht** in einheitlicher Weise vorgenommen wurde. Die umrandete Figur ist zwar symmetrisch, aber der Übergang von einer Kachel zur nächst ist **nicht** einheitlich, wie man an der Abfolge der roten Punkte erkennen kann.

Regelmäßige 12-Ecke können unregelmäßige n-Ecke vollständig in einheitlicher Weise umranden:



Das scheint mit 11-Ecken nicht zu gelingen, jedenfalls nicht beim ersten Versuch:

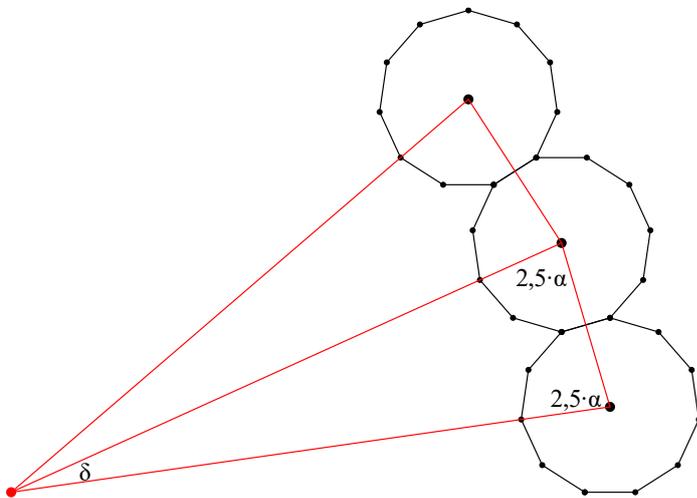
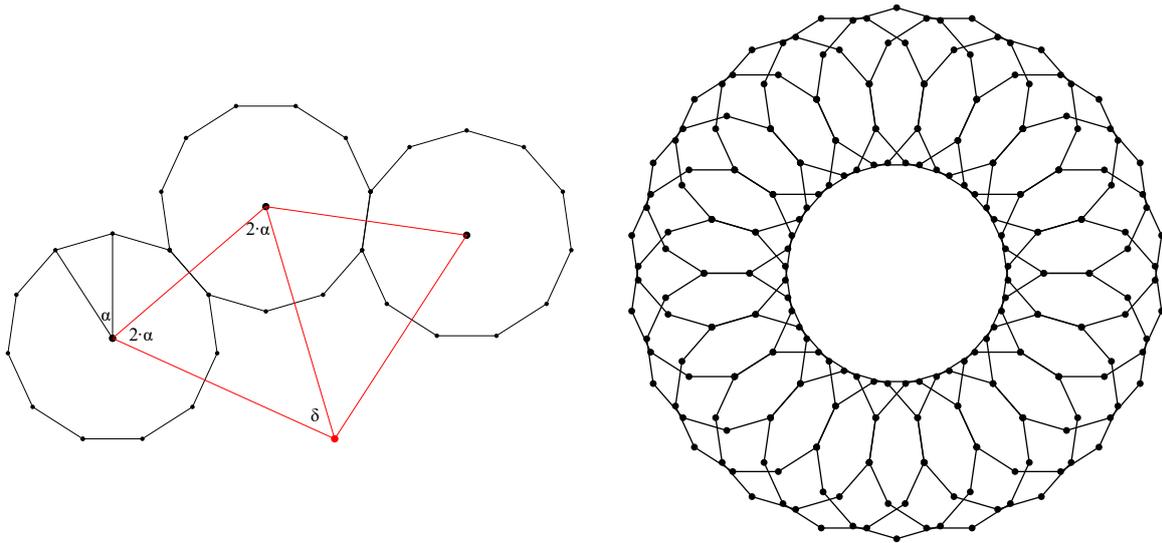


Sehen wir uns das näher an und greifen dafür jeweils 3 sich berührende 11-Ecke heraus. Der Mittelpunktswinkel des 11-Ecks ist  $\alpha = \frac{360^\circ}{11}$ .

Oben links im nicht gelingenden Fall beträgt der Drehwinkel

$$\delta = 180^\circ - 4 \cdot \alpha = 180^\circ - \frac{4 \cdot 360^\circ}{11} = 360^\circ \cdot \frac{3}{22}.$$

Erst mit 22 Bausteinen hat man ein sich schließendes (und sich überlappendes) Muster.



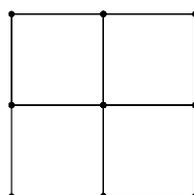
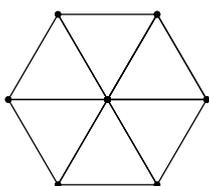
Oben rechts im gelingenden Fall ist der Drehwinkel  $\delta = 180^\circ - 5 \cdot \frac{360^\circ}{11} = \frac{360^\circ}{22}$ .  
 Nach 22 Kacheln hat man wieder bei der ersten angekommen.

Dies lässt sich auf regelmäßige n-Ecke verallgemeinern. Der Winkel bei den Mittelpunkten der n-Ecke betrage  $\frac{m}{2} \cdot \alpha$ , also ist der Drehwinkel  $\delta = 180^\circ - m \cdot \alpha = 180^\circ - m \cdot \frac{360^\circ}{n} = 360^\circ \cdot \frac{n - 2 \cdot m}{2 \cdot n}$ .

Für  $m = \frac{n-1}{2}$  ist  $\delta = \frac{360^\circ}{2 \cdot n}$ , und der Kreis schließt sich. Das ist für ungerade n immer erreichbar.

Bei geradem  $n = 2 \cdot k$  ist  $\delta = 180^\circ - m \cdot \alpha = 180^\circ - m \cdot \frac{360^\circ}{2 \cdot k} = 360^\circ \cdot \frac{k - m}{2 \cdot k}$  und damit  $m = k - 1$  wählbar.

Daher kann man immer ein ringförmiges Kachelmuster aus regelmäßigen n-Ecken erreichen.



Bei 3-Ecken und bei 4-Ecken schrumpft das umrandete Gebiet auf einen Punkt zusammen.