Jörg MEYER, Hameln

18. 6. 2022

Strahlensatz und Höhensatz führen jeweils zu Parabel und Hyperbel

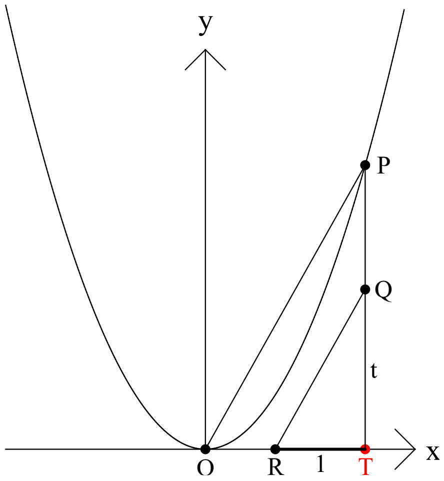
Parabelkonstruktion mit dem Strahlensatz:

Der Punkt $T=\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auf der x-Achse bewegt.

Die Punkte $Q=\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ und $R=\begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind einfach zu konstruieren.

Die Parallele zu RQ durch den Ursprung schneidet TQ in P.

Dann ist $\frac{|TP|}{|OT|}=\frac{|QT|}{|RT|}$, also $\frac{|TP|}{t}=\frac{t}{1}$ und damit $P=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

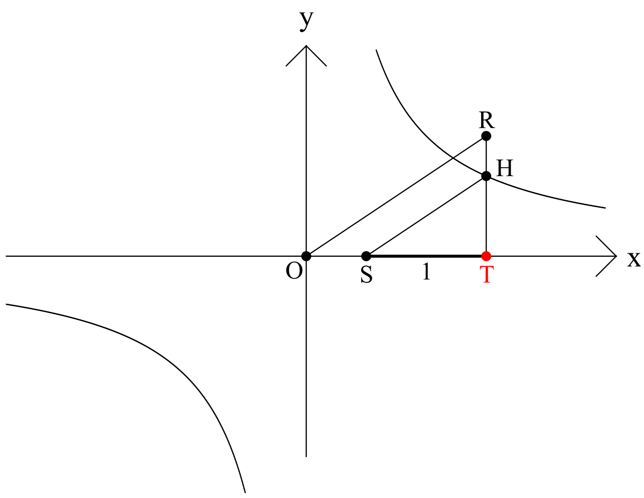


Hyperbelkonstruktion mit dem Strahlensatz:

Der Punkt $T=\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auf der x-Achse bewegt.

Die Punkte $T=\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ und $S=\begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind einfach zu konstruieren.

Die Parallele zu OR durch S schneidet TR in H. Dann $\frac{|RT|}{|OT|}=\frac{|HT|}{|ST|}$, also $\frac{1}{t}=\frac{|HT|}{1}$ und damit $H=\begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$.



Man kann statt des Strahlensatzes auch den Höhensatz verwenden:

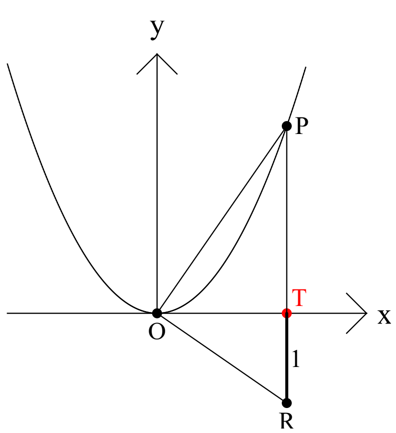
Parabelkonstruktion mit dem Höhensatz:

Der Punkt $T=\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auf der x-Achse bewegt.

Der Punkt $R=\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ ist einfach zu konstruieren.

Die Senkrechte zu OR durch O schneidet RT in P.

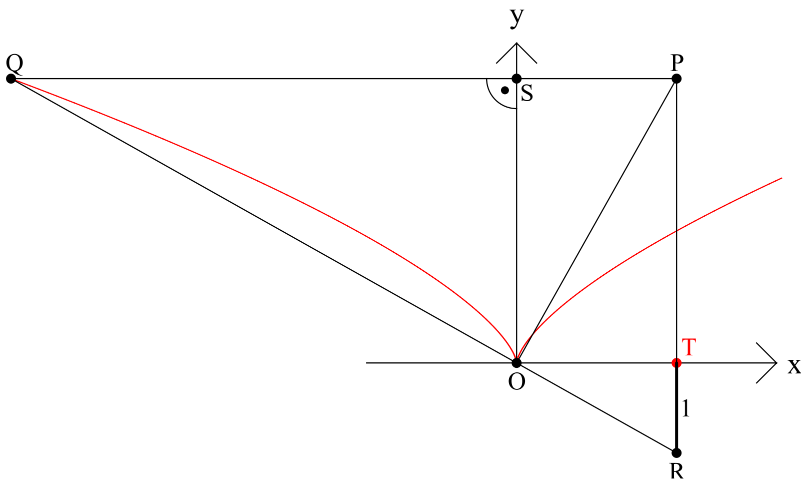
Dann ist $|OT|^2=|TR|\cdot|TP|$, also $t^2=1\cdot|TP|$ und damit $P=\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$.



Schneidet man die Gerade durch R und O mit der Senkrechten zu RP durch P, so gelangt man zum Punkt Q. Der Höhensatz in QOP liefert

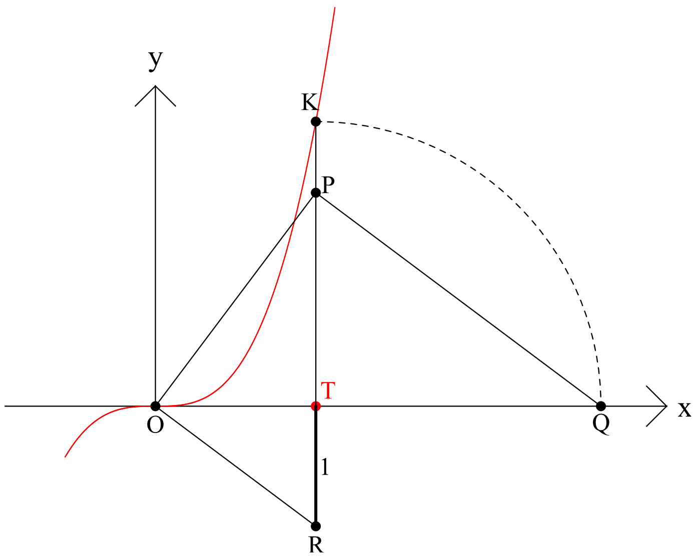
$|SQ| = \frac{|OS|^2}{|SP|} = \frac{t^4}{t} = t^3$, also liegt

$Q = \begin{pmatrix} -t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ auf der NEIL'schen Parabel.



Die Senkrechte zu OP durch P schneidet die x-Achse in Q.
Aufgrund des Höhensatzes im Dreieck OQP ist $|TQ| = \frac{|PT|^2}{|OT|} = \frac{\left(t^2\right)^2}{t} = t^3$.

Dreht man Q um T um 90°, erhölt man somit $K = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$ auf der kubischen Parabel.



Hyperbelkonstruktion mit dem Höhensatz:

Der Punkt $T = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auf der x-Achse bewegt. Der Punkt $R = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ ist einfach zu konstruieren. Die Senkrechte zu OR durch R schneidet die x-Achse in Q. Nach dem Höhensatz ist $|TQ| = \frac{|TR|^2}{|OT|} = \frac{1}{t}$. Dreht man Q um T mit 90°, erhält man den Hyperbelpunkt $H = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$.