

**Gegeben : 5 Punkte einer Ellipse. Wie findet man Achsen und Brennpunkte?**

**Inhalt**

Kap. 1: Der Satz von PASCAL ..... 1  
 Kap. 2: Konjugierte Durchmesser ..... 2  
     2.b. Konstruktion des Ellipsen-Zentrums ..... 3  
     2.c. Konstruktion konjugierter Punkte ..... 3  
 Kap. 3: Konstruktion der Achsen ..... 4  
 Anhang: Wie erkennt man den Typ des Kegelschnitts? ..... 5  
 Anhang: Beispiel ..... 6

Eine Ellipse ist durch 5 (nicht kollineare) Punkte festgelegt. Um weitere Punkte, deren Tangenten sowie Achsen und Brennpunkte zu konstruieren, ist ein Satz des damals etwa 16-jährigen Blaise PASCAL hilfreich (hätte NEWTON ihn gekannt, hätte er manche Passagen in seinen Principia kürzer und transparenter gestalten können). Zu den Vorkenntnissen gehört auch ein Einblick in die Theorie der konjugierten Durchmesser.

Im 1. Kapitel wird der Satz von PASCAL angegeben und erläutert, dass er für ganz unterschiedliche Zwecke er fruchtbar gemacht werden kann. Im 2. Kapitel geht es um konjugierte Durchmesser und darum, wie man das Zentrum ermittelt und wie man konjugierte Punkte konstruiert. Im Kapitel 3 wird das Verfahren von RYTZ zur Konstruktion der Achsen bei Ellipsen erläutert.

**Kap. 1: Der Satz von PASCAL**

Liegen A, B, ..., F auf einer Ellipse, so sind

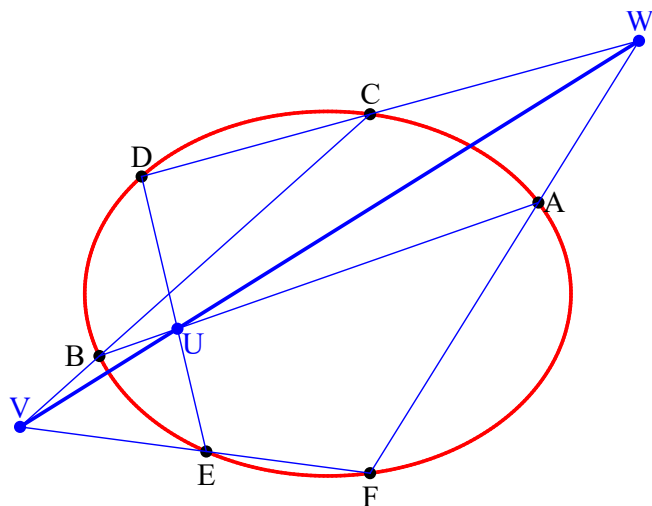
$$U = AB \cap DE$$

$$V = BC \cap EF$$

$$W = CD \cap FA$$

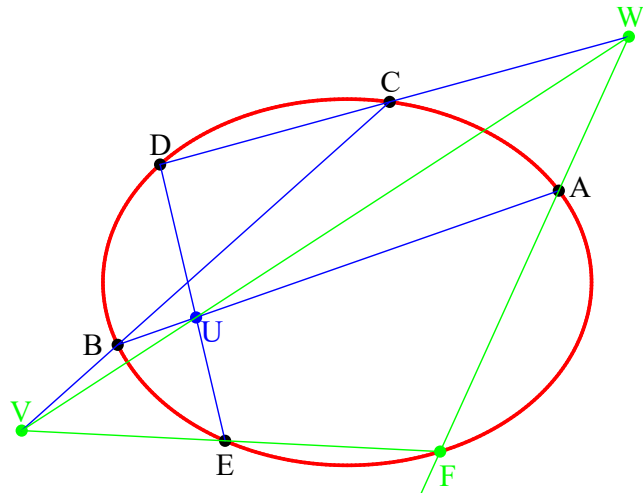
kollinear.

Sind umgekehrt U, V, W kollinear, so liegen die 6 Punkte auf einem Kegelschnitt (Satz von William BRAIKENRIDGE und Colin MACLAURIN).



Damit kann man zu fünf Punkten A, B, ..., E einen sechsten Punkt F konstruieren, der etwa zu A eine vorgegebene Steigung hat, so dass man *zueinander parallele Sehnen* bekommen kann:

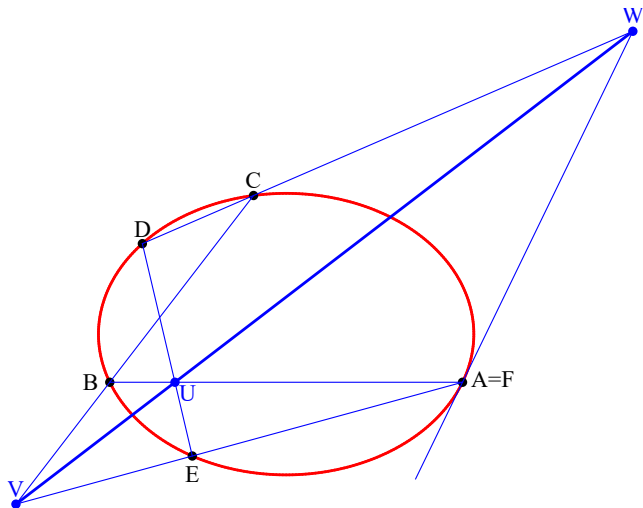
Es ist  $U=AB \cap DE$ . Man beginnt mit der (grünen) Gerade g durch A mit vorgegebener Steigung m, dann sei  $W=g \cap CD$  und  $V=BC \cap UW$  und schließlich  $F=EV \cap AW$ . Damit hat AF die vorgegebene Steigung m.



Variiert man die Steigung m, bekommt man, ausgehend von den 5 Punkten A, B, ..., E, alle anderen Ellipsenpunkte. Daher ist ein Kegelschnitt durch 5 Punkte bestimmt.

Der Satz von PASCAL liefert auch die *Tangenten* in den vorgegebenen (und damit in allen) Punkten:

Will man die Tangente etwa im Punkt A haben, identifiziere man A mit F. Mit  $U=AB \cap DE$  und  $V=BC \cap EF=BC \cap EA$  ist dann nicht nur  $W=CD \cap FA=CD \cap AA$ , sondern auch  $W=CD \cap UV$ , und daher ist WA die Tangente in A.



## Kap. 2: Konjugierte Durchmesser

Ellipsen und Hyperbeln haben ein Zentrum Z. Geraden durch Z heißen *Durchmesser*.

Bei einer Ellipse liegen die Mittelpunkte zueinander paralleler Sehnen auf einer Geraden, die durch das (dick markierte) Zentrum Z und durch den Berührungspunkte der zu den Sehnen parallelen Tangenten geht.

Die Ellipse habe die Gleichung  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ .

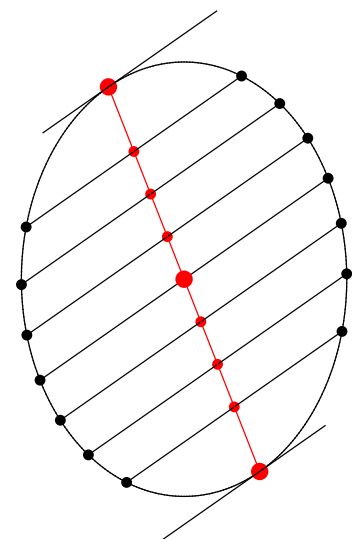
Hat die Sehne die Steigung  $\mu_1$  und hat die Mittelpunktsgerade die

Steigung  $\mu_2$ , so gilt  $\mu_1 \cdot \mu_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ .

Die beiden Steigungen heißen *zueinander konjugiert*.

Zwei Ellipsenpunkte U und V heißen *zueinander konjugiert*, wenn die Steigungen von ZU und ZV zueinander konjugiert sind.

Durchmesser heißen zueinander konjugiert, wenn ihre Steigungen es sind.



Streckt man den Kreis mit  $x^2 + y^2 = a^2$ , indem man  $y$  ersetzt durch  $\frac{a}{b} \cdot y$ , bekommt man die Ellipse

mit  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Staucht man die Geraden mit  $y = m_1 \cdot x$  und  $y = m_2 \cdot x$ , indem man  $y$  ersetzt durch

$\frac{a}{b} \cdot y$ , bekommt man die Gleichungen  $y = \frac{b}{a} \cdot m_1 \cdot x =: \mu_1 \cdot x$  und  $y = \frac{b}{a} \cdot m_2 \cdot x =: \mu_2 \cdot x$ , und aus der

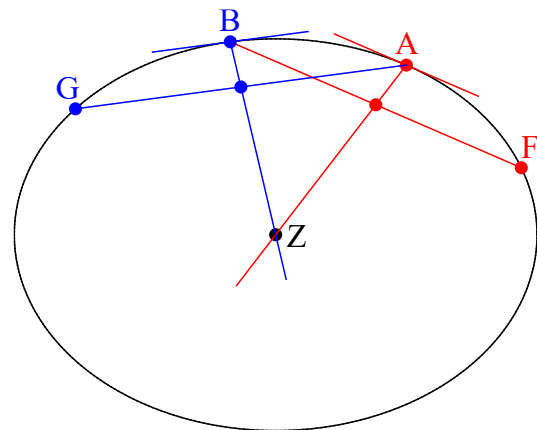
Orthogonalitätsbedingung  $m_1 \cdot m_2 = -1$  wird  $\mu_1 \cdot \mu_2 = -\frac{b^2}{a^2}$ . Die Konjugation bei Ellipsen

verallgemeinert daher die Orthogonalität.

**2.b. Konstruktion des Ellipsen-Zentrums**

Sind 5 Ellipsenpunkte gegeben, kann man das Zentrum konstruieren:

Man konstruiere mit Hilfe des Satzes von PASCAL die Tangente in A und konstruiere mit Hilfe desselben Satzes den Ellipsenpunkt F so, dass BF zur Tangente in A parallel ist. Dann geht die Verbindungsgerade zwischen A und dem Mittelpunkt von BF durch das Zentrum Z der Ellipse. Wiederholt man diese Vorgehensweise mit der Tangente in B und dem Ellipsenpunkt G so, dass AG zur Tangente in B parallel ist, bekommt man wieder eine Gerade durch Z und damit Z selbst. (Man beachte, dass man zur Ermittlung von Z alle 5 Ellipsenpunkte A, B, ..., E benötigt.)



**2.c. Konstruktion konjugierter Punkte**

Es sei A ein Ellipsenpunkt, gesucht ist ein Ellipsenpunkt Q, der zu A konjugiert ist. Hätte man schon Q, wüsste man:

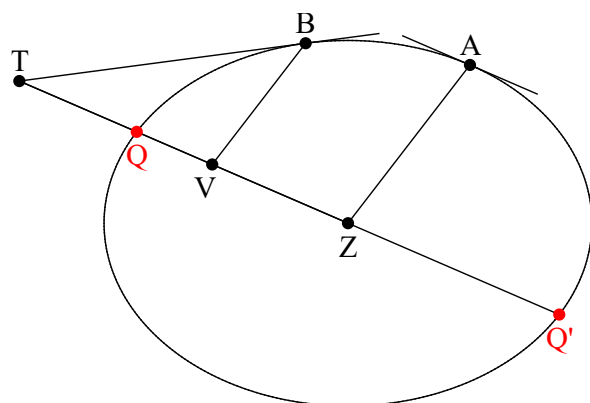
ZQ ist parallel zur Tangente in A. Mit  $A = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$  hat die Tangente die Steigung  $m = -\frac{b \cdot \cos t}{a \cdot \sin t}$ .

ZQ schneidet die Ellipse in  $Q = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin t \\ b \cdot \cos t \end{pmatrix}$ .

Die Tangente<sup>1</sup> in B  $= \begin{pmatrix} a \cdot \cos s \\ b \cdot \sin s \end{pmatrix}$  hat die Gleichung

$$\frac{x \cdot a \cdot \cos s}{a^2} + \frac{y \cdot b \cdot \sin s}{b^2} = 1 \text{ und schneidet}$$

$$ZQ: y = m \cdot x \text{ in } T = \frac{Q}{\sin(s-t)}.$$



V auf ZQ sei so, dass VB zu ZA parallel ist, was auf  $V = Q \cdot \sin(s-t)$  führt. Damit ist  $ZV \cdot ZT = ZQ^2$ .

Man kann nun eine Prozedur schreiben, die in einen zu Punkt A konjugierten Ellipsenpunkt Q liefert (erst konstruiert man Z, dann einen Punkt auf der zu ZA konjugierten Geraden, dann T und V).

<sup>1</sup> Anregung zu dieser Vorgehensweise durch: Mukhopadhyay (1893): An elementary treatise on the geometry of conics, London etc.: MacMillan, chapter II, prop. XXII; dort wird eine synthetische Begründung dargestellt.

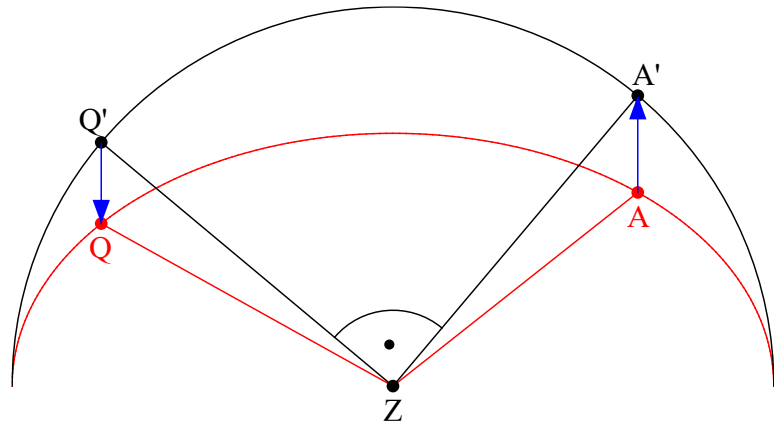
(Man bekommt den zweiten zu A konjugierten Punkt Q', indem man Q an Z spiegelt.)

### Kap. 3: Konstruktion der Achsen

Es seien 5 Ellipsenpunkte gegeben. Man konstruiere das Zentrum Z und zum Ellipsenpunkt A einen dazu konjugierten Punkt Q. Das folgende Verfahren, damit die Achsen zu konstruieren, geht zurück auf Vorarbeiten von PAPPUS und Leonhard EULER und wurde von David RYTZ von Brugg (1801 - 1868) ausgebaut.

A sei ein beliebiger Ellipsenpunkt und Q mit  $\sphericalangle(QZA) < 180^\circ$  sei zu A konjugiert.

$Q = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin t \\ b \cdot \cos t \end{pmatrix}$  entsteht aus  
 $A = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$ , indem man den  
 zugehörigen Punkt  $A' = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \end{pmatrix}$   
 auf dem großen Scheitelkreis um  
 $90^\circ$  gedreht und das Ergebnis  
 $Q' = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin t \\ a \cdot \cos t \end{pmatrix}$  auf die Ellipse  
 projiziert hat.



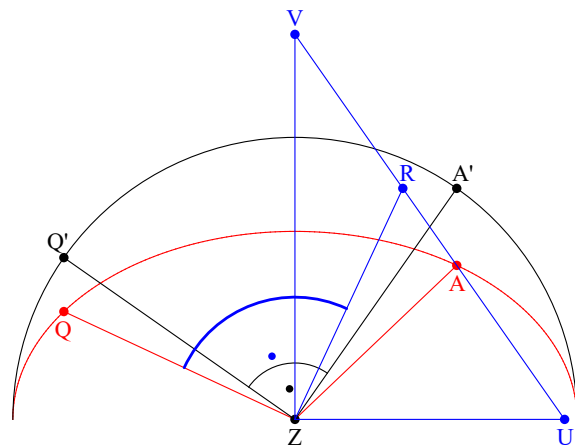
Daher wird es nicht ganz abwegig sein, Q um Z um  $90^\circ$  zurückzudrehen (von Q in Richtung A) mit

dem Ergebnis  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot Q = \begin{pmatrix} b \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \end{pmatrix}$ .

Die Gerade AR:  $y = -\tan t \cdot (x - a \cdot \cos t) + b \cdot \sin t$  schneidet die kleine Halbachse in

$V = (a+b) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$  und die große Halbachse in

$U = (a+b) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ .



Allerdings hat man aber die Achsen noch gar nicht. Nun kommt eine schöne Beobachtung:

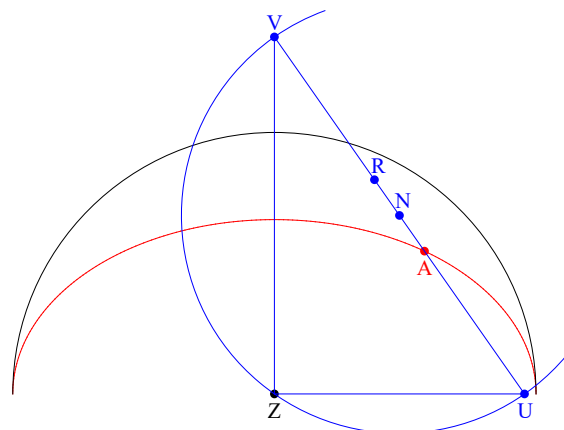
Für den Mittelpunkt N von AR gilt

$N = \frac{A+R}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  und daher

$|NZ| = |NU| = |NV| = \frac{a+b}{2}$ .

U und V liegen daher auf dem Kreis um Z mit dem Radius  $|ZN|$  und nach Obigem auf der Geraden durch A und R.

Nun hat man die Achsrichtungen ZU und ZV, die wegen THALES aufeinander senkrecht stehen.



Wegen  $|NZ|=|NU|=|NV|=\frac{a+b}{2}$  und  $|NA|=\frac{a-b}{2}$  ist  $a=|NV|+|NA|=|AV|$  und  $b=|NV|-|NA|=|AU|$ .

Damit hat man die Achsrichtungen sowie  $a$  und  $b$  und die Brennweite  $f=\sqrt{a^2-b^2}$ .

Zusammenfassung: Man ermittle den zu  $A$  konjugierten Punkt  $Q$  mit  $\sphericalangle(QZA)<180^\circ$  und drehe  $Q$  um  $90^\circ$  in Richtung  $A$  mit dem Ergebnis  $R$ . Man schlage Kreis um den Mittelpunkt  $N$  von  $A$  und  $R$  um  $Z$ ; dieser trifft die Gerade  $AR$  in den Achsenpunkten  $U$  und  $V$ . Dann ist  $a=|AV|$  und  $b=|AU|$ .

### Anhang: Wie erkennt man den Typ des Kegelschnitts?

Das geschilderte Verfahren zur Bestimmung von Brennpunkten und Achsen setzt voraus, dass man wusste, ob es sich um eine Ellipse handelt. Aber woher weiß man das?

Schreibt man  $P=\frac{x\cdot A+y\cdot B+z\cdot C}{x+y+z}=(x:y:z)$  in baryzentrischen Punkt-Koordinaten, so liegt  $P$  genau

dann auf einem Kegelschnitt durch  $A, B, C$ , wenn  $\boxed{r\cdot y\cdot z+s\cdot z\cdot x+t\cdot x\cdot y=0}$  für passende  $r, s, t$  gilt.

Nun sei  $P^\#=(x^\#:y^\#:z^\#)=\left(\frac{a^2}{x}:\frac{b^2}{y}:\frac{c^2}{z}\right)$  Bild von  $P=(x:y:z)$  bei der isogonalen Konjugation. Man

beachte, dass die isogonale Konjugation involutorisch ist, d.h.  $(P^\#)^\#=P$ .

Nun gilt die folgende Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned} r\cdot y\cdot z+s\cdot z\cdot x+t\cdot x\cdot y &= 0 \\ r\cdot\frac{b^2}{y^\#}\cdot\frac{c^2}{z^\#}+s\cdot\frac{c^2}{z^\#}\cdot\frac{a^2}{x^\#}+t\cdot\frac{a^2}{x^\#}\cdot\frac{b^2}{y^\#} &= 0 \\ r\cdot\frac{x^\#}{a^2}+s\cdot\frac{y^\#}{b^2}+t\cdot\frac{z^\#}{c^2} &= 0 \end{aligned}$$

$P^\#=(x^\#:y^\#:z^\#)$  liegt also auf der Geraden  $\left[\frac{r}{a^2}:\frac{s}{b^2}:\frac{t}{c^2}\right]$  (in baryzentrischen Linien-Koordinaten).

Die isogonale Konjugation bildet daher Kegelschnitte durch  $A, B, C$  auf Geraden ab.

Der Umkreis von  $A, B, C$  hat die Gleichung  $a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y$ ; er wird bei der isogonalen Konjugation auf die Ferngerade  $[1:1:1]$  abgebildet.

Nun mögen die 5 Punkte  $A, B, \dots, E$  auf einem Kegelschnitt liegen. Dann kann man  $D$  und  $E$  in baryzentrischen Koordinaten bzgl.  $A, B$  und  $C$  ausdrücken und die isogonalen Konjugate  $D^\#$  und  $E^\#$  bestimmen.  $D^\#$  und  $E^\#$  legen die Gerade  $g$  fest, auf die der Kegelschnitt bei der isogonalen Konjugation abgebildet wird.

Falls  $g$  den Umkreis von  $A, B, C$  schneidet, so gilt für jeden der beiden Schnittpunkte  $S$ , dass  $S^\#$  auf der Ferngeraden liegt (da  $S$  auf dem Umkreis liegt) und dass  $S^\#$  auf dem Kegelschnitt liegt (da  $S$  auf  $g$  liegt und weil die isogonale Konjugation involutorisch ist). In diesem Fall schneidet der Kegelschnitt also die Ferngerade, so dass es sich um eine Hyperbel handelt. Stimmen beide Schnittpunkte überein, handelt es sich um eine Parabel. Falls  $g$  den Umkreis nicht schneidet, liegt eine Ellipse vor, da Ellipsen die Ferngerade nicht schneiden.

**Anhang: Beispiel**

In den folgenden Skizzen seien die roten Punkte A, B, ..., E gegeben.

In der folgenden Skizze schneidet  $D^{\#}E^{\#}$  den Umkreis nicht, so dass eine Ellipse vorliegt:

