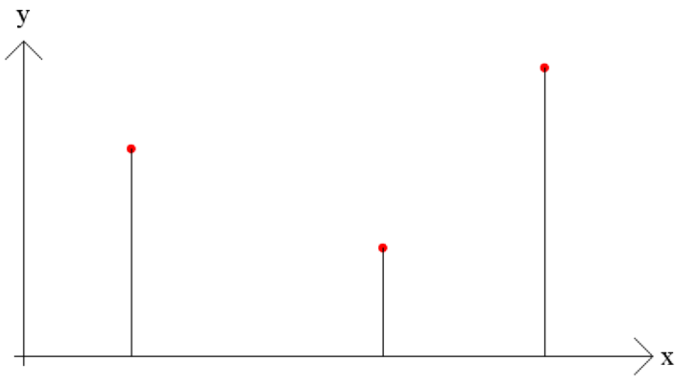
Jörg MEYER, Hameln

Graphen durch vorgegebene Punkte

Jeder weiß, wie man durch **2** Punkte den Graphen einer **linearen** Funktion legt: Sind $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die beiden Punkte, so berchnet man zuerst die Steigung zu $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; dann ist die Gerade gegeben durch $y = m \cdot (x - x_1) + y_1$.

Aber wie legt man durch **3** Punkte $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ den Graphen einer **quadratischen** Funktion?

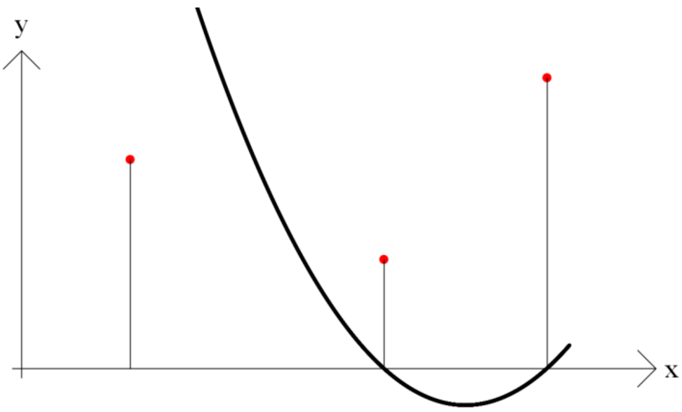


Erste Idee: Die quadratische Funktion habe die Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Dann muss

$$y_1 = a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c; \quad y_2 = a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c; \quad y_3 = a \cdot x_3^2 + b \cdot x_3 + c$$

sein. Dies ist ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten a, b, c.
Das kann man lösen. Aber wenn man 50 Punkte hätte und suchte ein Polynom vom Grad 49, hätte man 50 Gleichungen, und das wird aufwändig.

Bessere Idee: Wir konzentrieren uns auf den ersten Punkt. Konzentration heißt hier: Wir suchen eine Funktion, die bei den beiden anderen Punkten den Wert Null hat.
Eine solche Funktion ist leicht zu bekommen:
$f_1(x) = (x - x_2) \cdot (x - x_3)$ erfüllt die Anforderung.



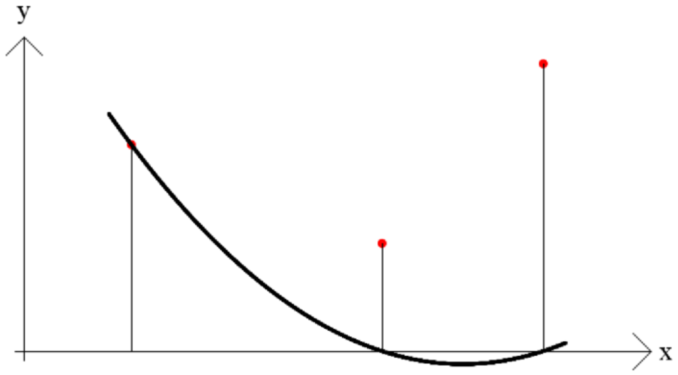
Nun wäre es noch schön, wenn der Graph dieser Funktion durch den ersten Punkt ginge.
Bisher ist $f_1(x_1) = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)$.

Wenn man f_1 durch $f_1(x_1)$ teilt, erhält man

$$L_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} = \frac{(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}$$

mit den Eigenschaften, dass auch L_1 beim zweiten und beim dritten Punkt Null ist und beim ersten Punkt den Wert 1 hat.

Nun will man nicht den Wert 1, sondern den Wert y_1, muss also L_1 noch mit y_1 multiplizieren.

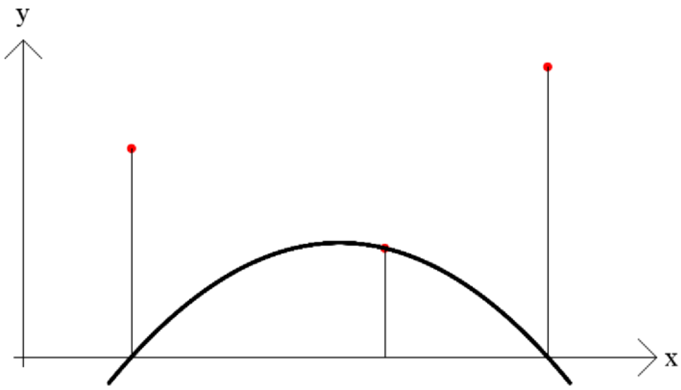


Die zum ersten Punkt gehörige Funktion ist also gegeben durch

$$y_1 \cdot L_1(x) = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}.$$

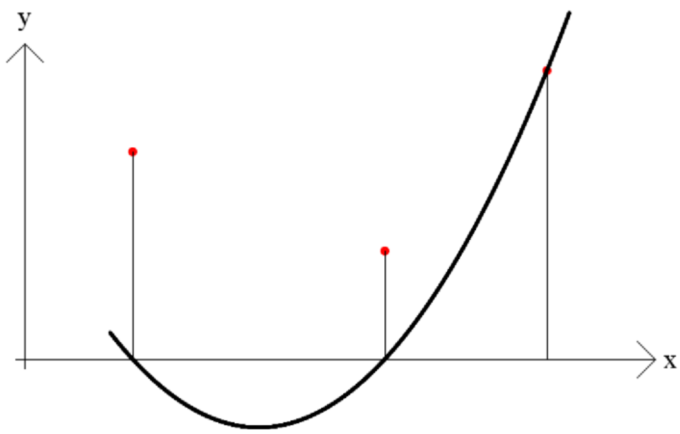
Analog ist die zum zweiten Punkt gehörige Funktion gegeben durch

$$y_2 \cdot L_2(x) = y_2 \cdot \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}.$$

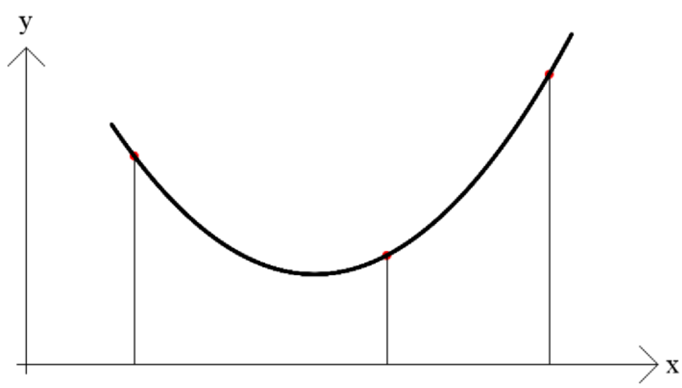


Und zum dritten Punkt gehört

$$y_3 \cdot L_3(x) = y_3 \cdot \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}.$$



Nun suchen wir aber eine quadratische Funktion, deren Graph durch alle drei Punkte geht. Die Lösung ist einfach: Da die erste Hilfsfunktion beim ersten Punkt den richtigen Wert hat und bei den beiden anderen den Wert 0, die zweite Hilfsfunktion beim zweiten Punkt den richtigen Wert hat und bei den beiden anderen den Wert 0 usw., braucht man die drei Hilfsfunktionen nur zu addieren, um das gewünschte Ergebnis zu bekommen.

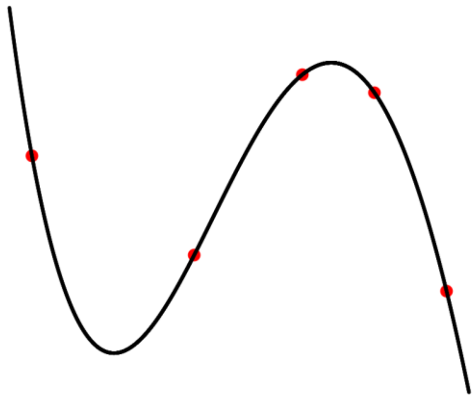


Diese Methode geht auf Joseph-Louis ***Lagrange*** (1736–1813) zurück.

Blicken wir zurück: Die gesuchte Funktion hat die Form $y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x)$.

Für gewöhnlich hat eine quadratische Funktion die Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1$.
Bei der gewöhnlichen Form ist die Funktion eine Linearkombination der Basisfunktionen 1, x, und x^2.
Bei Lagrange ist die Funktion eine Linearkombination der Basisfunktionen $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$, was sich bei unserem Interpolationsproblem als günstiger herausgestellt hat.

Das Verfahren funktioniert auch für mehr als drei Punkte.



Vorteil: Ändern sich die y-Werte, hat man schnell die neue Funktion. Außerdem hat man einen geschlossenen Ausdruck füt die interpolierende Funktion.
Nachteil: Ändern sich auch die x-Werte oder kommen neue Punkte hinzu, muss man von vorne beginnen.

Isaac Newton (1642 - 1727) war einen anderen Weg gegangen:
Der Term der Geraden durch die ersten beiden Punkte $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ist

$$N_2(x) = y_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1 = y_1 \cdot 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1),$$

was man auffassen kann als Linearkombination der beiden Basisfunktionen 1 und $x - x_1$. Diese **Uminterpretation** ist **fruchtbar**, denn sie legt nahe, dass man so weitermachen kann:
Der Term der quadratischen Funktion durch die ersten drei Punkte ist dann vermutlich gegeben durch $N_3(x) = \underbrace{y_1 \cdot 1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)}_{N_2(x)} + A \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Wegen

$$N_3(x_1) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_1 - x_1) + A \cdot (x_1 - x_1) \cdot (x_1 - x_2) = y_1$$

und

$$N_3(x_2) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) + A \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_2) = y_2$$

verläuft der Graph auf jeden Fall durch die ersten beiden Punkte.

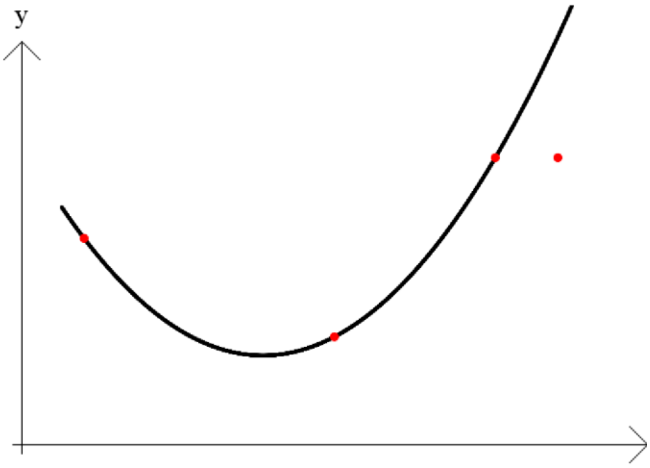
Wenn er auch durch den dritten Punkt verlaufen soll, muss

$$N_3(x_3) =$$

$$\underbrace{y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_3 - x_1)}_{N_2(x_3)} + A \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)$$

$$= y_3$$

sein, also ist $A = \dfrac{y_3 - N_2(x_3)}{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)}$.



Wenn noch ein vierter Punkt hinzukommt, muss

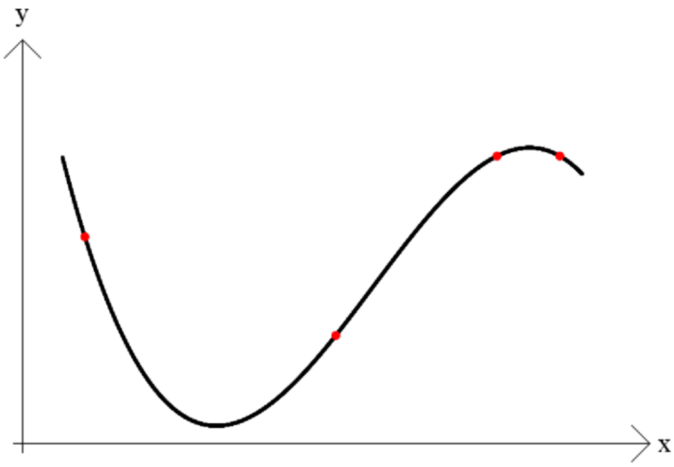
$$N_4(x_4) =$$

$$N_3(x_4) + B \cdot (x_4 - x_1) \cdot (x_4 - x_2) \cdot (x_4 - x_3)$$

$$= y_4$$

sein, woraus sich B ermitteln lässt:

$$B = \frac{y_4 - N_3(x_4)}{(x_4 - x_1) \cdot (x_4 - x_2) \cdot (x_4 - x_3)}.$$



Natürlich liefern die Verfahren von Lagrange und von Newton dasselbe Ergebnis, denn es kann nur *eine* Gerade durch zwei Punkte geben, nur *eine* quadratische Funktion geben, deren Graph durch 3 Punkte geht, usw.

Die Aufgabenstellung war, eine **Polynomfunktion mit möglichst kleinem Grad** zu finden. Schreibt man die Funktionsklasse nicht vor, ist das Ergebnis nicht mehr eindeutig (schon durch zwei Punkte verlaufen viele Graphen quadratischer Funktionen).