Jörg MEYER, Hameln

Fünf Wege zur Integration der Potenzfunktionen

Weg 1: Der übliche Schulbuch-Weg

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $f(x)=x^p$ mit natürlichzahligem p soll von 0 bis b ermittelt werden.

Das Integrationsintervall wird in n gleichgroße Teile geteilt; mit $h=\frac{b}{n}$ hat die approximierende Rechteckssumme den Wert

$$R_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(i\cdot h)\cdot h=\sum_{i=0}^{n-1} i^p\cdot h^{p+1}=h^{p+1}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^p=\frac{b^{p+1}}{n^{p+1}}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^p\,.$$

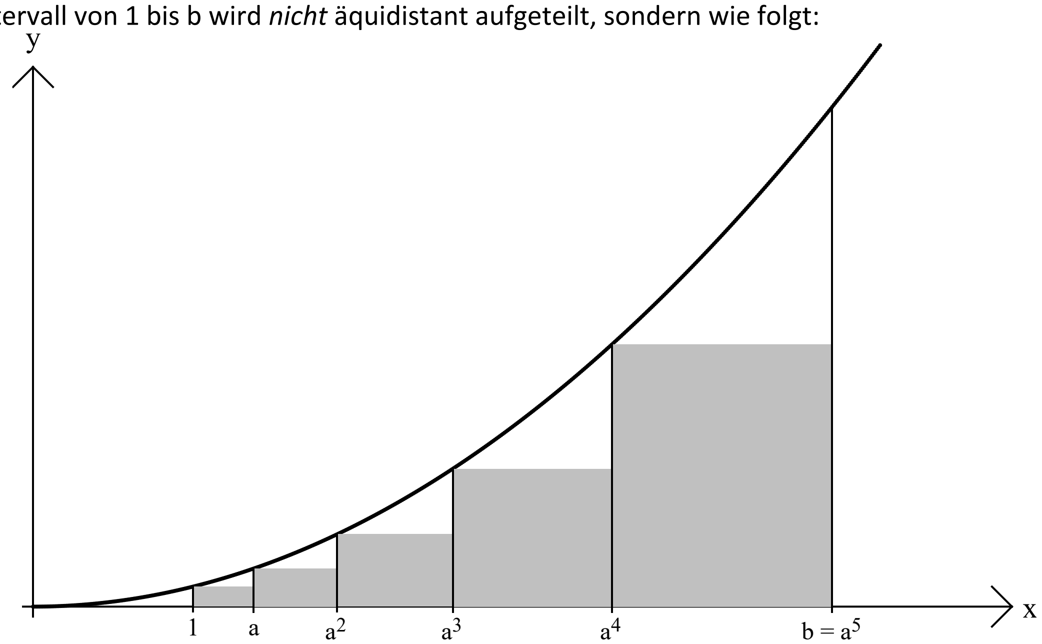
Nachteil: Man benötigt die Potenzsumme $\sum_{i=0}^{n-1} i^p$.

Beispiel für $p=2$: $R_n=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2\cdot n-1)}{6}=\frac{b^3}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{2\cdot n-1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 2=\frac{b^3}{3}$.

Weg 2: Integration nach FERMAT

Der Flächeninhalt unter dem Graphen zu $f(x)=x^p$ mit natürlichzahligem p soll von 1bis b ermittelt werden.

Das Intervall von 1 bis b wird *nicht* äquidistant aufgeteilt, sondern wie folgt:



Wir nähern die Fläche unter dem Graphen an durch Rechtecke unterschiedlicher Breite. Wenn wir 5 Rechtecke nehmen, ist $a=\sqrt[5]{b}$. Die Rechteckssumme beträgt

$$R_5 = f(1)\cdot(a-1) + f(a)\cdot\left(a^2-a\right) + f\left(a^2\right)\cdot\left(a^3-a^2\right) + f\left(a^3\right)\cdot\left(a^4-a^3\right) + f\left(a^4\right)\cdot\left(a^5-a^4\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{4} f\left(a^i\right)\cdot\left(a^{i+1}-a^i\right) = \sum_{i=0}^{4} a^{p\cdot i}\cdot a^i\cdot(a-1) = (a-1)\cdot\sum_{i=0}^{4}\left(a^{p+1}\right)^i = (a-1)\cdot\frac{\left(a^{p+1}\right)^5-1}{a^{p+1}-1}$$

$$= (a-1)\cdot\frac{\left(a^5\right)^{p+1}-1}{a^{p+1}-1} = (a-1)\cdot\frac{b^{p+1}-1}{a^{p+1}-1} = \frac{b^{p+1}-1}{\left(\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\right)} = \frac{b^{p+1}-1}{a^p+\ldots+a+1}$$

Hätte man n Rechtecke genommen, hätte man $a = \sqrt[n]{b}$ und

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a^i\right)\cdot\left(a^{i+1}-a^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a^{p\cdot i}\cdot a^i\cdot(a-1) = (a-1)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(a^{p+1}\right)^i = (a-1)\cdot\frac{\left(a^{p+1}\right)^n-1}{a^{p+1}-1}$$

$$= (a-1)\cdot\frac{b^{p+1}-1}{a^{p+1}-1} = \frac{b^{p+1}-1}{\left(\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\right)} = \frac{b^{p+1}-1}{a^p+\ldots+a+1}$$

gehabt. Wenn n immer größer wird, nähert sich a immer mehr der 1, so dass man im Limes

$R_n = \frac{b^{p+1}-1}{a^p+\ldots+a+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{b^{p+1}-1}{p+1}$ bekommt.

Das Verfahren funktioniert für alle Potenzunktion mit natürlichem Exponenten, also für $x^2, x^3, x^4, x^5, \ldots$ und hat den Vorteil, dass man nicht die Formeln für die Potenzsummen

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ benötigt.

Wie steht es mit $f(x) = \sqrt{x}$? Man bekommt mit $a = \sqrt[n]{b}$ die Rechteckssumme

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a^i\right)\cdot\left(a^{i+1}-a^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a^{i/2}\cdot a^i\cdot(a-1) = (a-1)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(a^{3/2}\right)^i = (a-1)\cdot\frac{\left(a^{3/2}\right)^n-1}{a^{3/2}-1}$$

$$= (a-1)\cdot\frac{\left(a^n\right)^{3/2}-1}{a^{3/2}-1} = (a-1)\cdot\frac{b^{3/2}-1}{a^{3/2}-1} = \frac{b^{3/2}-1}{\left(\frac{\left(a^{1/2}\right)^3-1}{a^{1/2}-1}\cdot\frac{a^{1/2}-1}{a-1}\right)}$$

$$= \frac{b^{3/2}-1}{\left(\left(a^{1/2}\right)^2+a^{1/2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{a^{1/2}+1}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{b^{3/2}-1}{3\cdot\frac{1}{2}}$$

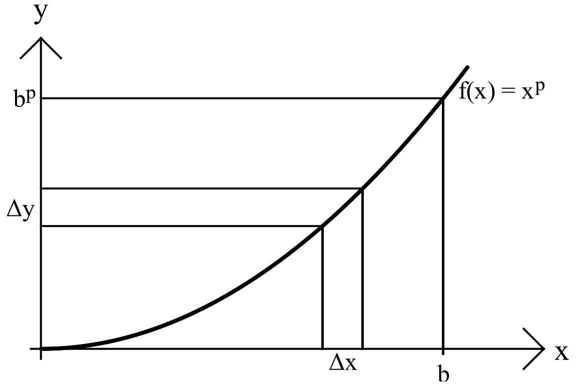
Das Verfahren funktioniert also auch für die Wurzelfunktion, wird aber etwas trickreicher, so dass es sich lohnt, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu verwenden.
Dies gilt auch für den Exponenten -2; der Exponent -1 wird in

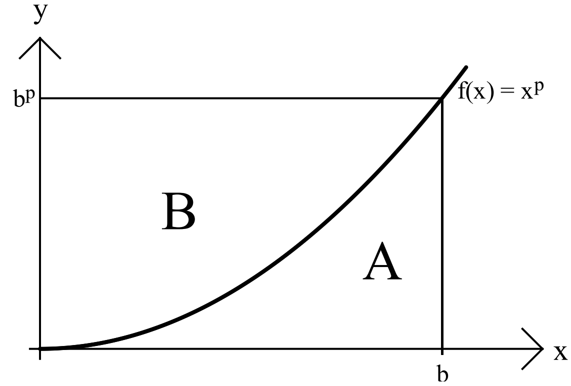
http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/25/tm1322.pdf

behandelt.

Weg 3: Eine Alternative

Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion $f(x)=x^p$ mit natürlichzahligem p soll von 0 bis b ermittelt werden, d.h. es soll A ermittelt werden. Klar: $A+B=b^{n+1}$.





Links hat der senkrechte Streifen etwa den Flächeninhalt $x^n \cdot \Delta x$, und der waagerechte Streifen hat etwa den Flächeninhalt $x \cdot \Delta y = x \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \approx x \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x = n \cdot x^n \cdot \Delta x$, ist also n-mal so groß wie der senkrechte Streifen. Daher ist B n-mal so groß wie A. Damit gilt $A+B=b^{n+1}=A+n\cdot A$, also $A=\frac{b^{n+1}}{n+1}$.

Weg 4: Ein allgemeiner Zugang über eine Teleskopsumme

Es soll f von a bis b integriert werden, und es sei $F'=f$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\cdot h)\cdot h \text{ mit kleinem } h=\frac{b-a}{n}.$$

Dies ist dann wegen $f(a+i\cdot h)=F'(a+i\cdot h)\approx\frac{F(a+i\cdot h+h)-F(a+i\cdot h)}{h}$ etwa so groß wie

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(a+i\cdot h+h)-F(a+i\cdot h)}{h}\cdot h$$

$$=\left(F(a+h)-F(a)\right)+\left(F(a+2\cdot h)-F(a+h)\right)+\ldots+\left(F\left(\underbrace{a+n\cdot h}_{b}\right)-F\left(a+(n-1)\cdot h\right)\right)$$

$$=F(b)-F(a)$$

Weg 5 über die Flächeninhaltsfunktion nach BARROW

Wir interessieren uns für den Flächeninhalt unter dem Graphen zu f im Intervall von a bis b und benutzen dazu die Flächeninhaltsfunktion $A_a(x)$, die den Flächeninhalt von a bis x angibt. Deren Ableitung an der Stelle x lässt sich annähern durch den Differenzenquotienten $\frac{A_a(x+h)-A_a(x)}{h}$. Im Zähler steht der Flächeninhalt von x bis x+h; für kleine Werte von h ist das ein schmales Rechteck mit der Breite h und der Höhe $f(x)$; der Differenzen-.Quotient lässt sich also für kleine h beschreiben durch $f(x)$. Daher ist $A_a'(x)=f(x)$. Ist F eine Stammfunktion zu f, ist also $A_a(x)=F(x)+C$, und wegen $0=A_a(a)=F(a)+C$ ist $C=-F(a)$. Zusammen hat man dann $A_a(b)=F(b)-F(a)$.