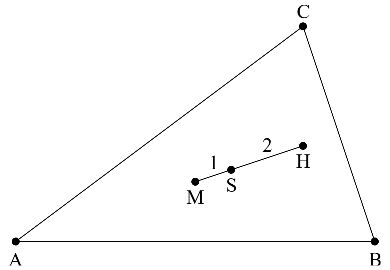
Jörg MEYER, Hameln

Bad Oexen, August 2022

Höhenschnitt und Umkreis

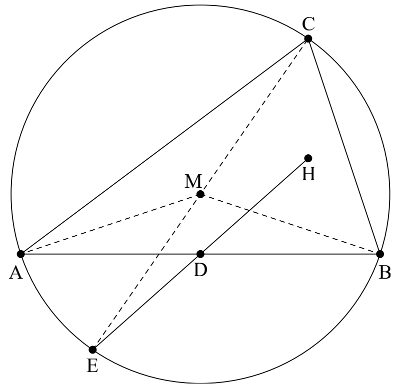
<u>Prop. 1</u>: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt H an den Mitten der Dreiecksseiten, so liegen die Bildpunkte auf dem Umkreis.

Am einfachsten ist wohl ein analytischer Beweis, der Gebrauch macht von der Euler-Geraden:



In einem Dreieck sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden und M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Dann ist bekanntlich $S = \frac{2 \cdot M + H}{3}$.



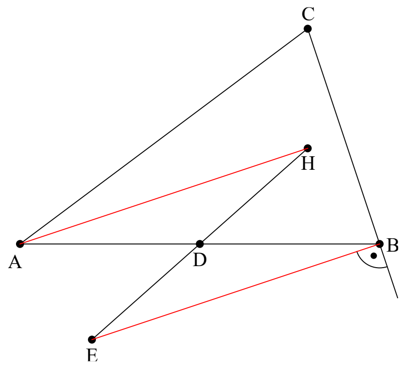
Nun sei $D = \frac{A+B}{2}$ der Mittelpunkt von AB. Man spiegele H an D mit dem Resultat $E = 2 \cdot D - H = A + B - H$.
Dann ist der Mittelpunkt

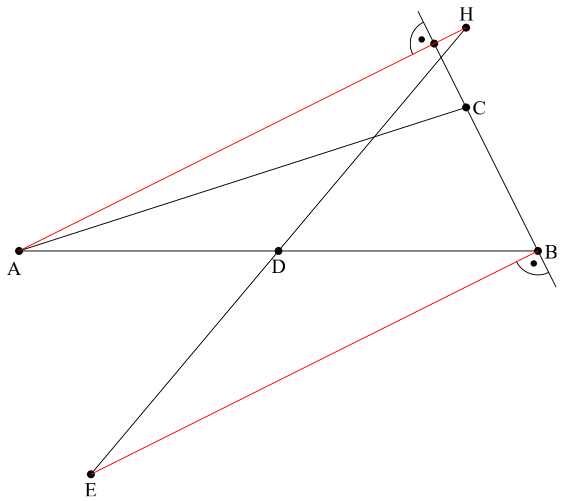
$$\frac{E+C}{2} = \frac{A+B-H+C}{2} = \frac{3 \cdot S - H}{2} = \frac{2 \cdot M + H - H}{2} = M$$

von EC der Umkreismittelpunkt.
E liegt also auf dem Umkreis.

Diese Begründung hat den Vorteil, dass sie für spitz- und für stumpfwinklige Dreiecke gilt.

Eine synthetische Begründung liegt auch auf der Hand:





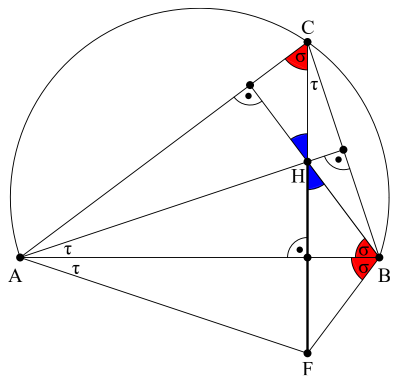
Da D sowohl AB als auch HE halbiert, ist EB zu AH parallel, also senkrecht zu BC.

Damit liegt B auf dem Thaleskreis über CE. Analog liegt auch A auf diesem Thaleskreis. Damit ist Prop. 1 bewiesen.

Der rechtwinklige Fall ist trivial.

Prop. 2: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt H an den Dreiecksseiten, so liegen die Bildpunkte auf dem Umkreis.

Hier ist ein synthetischer Beweis von Vorteil, obwohl man dann zwischen spitz-, recht- und stumpfwinkligen Dreiecken zu unterscheiden hat. Hier werden nur der erste und der dritte Fall betrachtet. Der zweite Fall ist trivial.



Spiegelt man H an AB, erhält man F. Die Strecke HF wird durch AB halbiert. Daher sind HBF und FHA gleichschenklig. Die roten Winkel σ haben alle die gleiche Größe; die blauen Winkel haben die Größe $90° - \sigma$.
Für τ argumentiert am analog. Der Winkel bei C beträgt $\sigma + \tau$, und der Winkel bei F beträgt $90° - \sigma + 90° - \tau$. Daher ist AFBC ein Sehnenviereck.