Jörg MEYER, Hameln
22. 5. 2022

ZUR GEOMETRISCHEN REIHE

Die Summe $\sum\limits_{k\geq 0} q^k = (1-q)^{-1}$ konvergiert für $|q|<1$.

Hier werden erst mehrere Zugänge zu dieser Beziehung und dann mehrere Folgerungen aus dieser Beziehung geschildert.

Zugang über endliche Summen

Nach der 3. binomischen Formel ist

$$1+q=\frac{1-q^2}{1-q}$$

$$1+q+q^2=\frac{1-q^2}{1-q}+\frac{q^2-q^3}{1-q}=\frac{1-q^3}{1-q}$$

$$1+q+q^2+q^3=\frac{1-q^3}{1-q}+\frac{q^3-q^4}{1-q}=\frac{1-q^4}{1-q}$$

und allgemein

$$\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}.$$

Für $|q|<1$ folgt im Limes $\sum\limits_{k\geq 0} q^k=\frac{1}{1-q}$.

Stochastischer Zugang

Man betrachte die Binomialverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p und q=1-p.
Mit Wahrscheinlichkeit p hat man bei der 1. Ziehung Erfolg.
Mit Wahrscheinlichkeit $q\cdot p$ hat man bei der 2. Ziehung Erfolg.
Mit Wahrscheinlichkeit $q^n\cdot p$ hat man bei der (n+1). Ziehung Erfolg.
Irgendwann hat man Erfolg, und das passiert bei der 1. oder bei der 2. oder ... Ziehung. Diese Ereignisse sind zueinander disjunkt, also ist $p+q\cdot p+q^2\cdot p+\ldots=p\cdot\left(1+q+q^2+\ldots\right)=1$, woraus

$1+q+q^2+\ldots=\frac{1}{p}=\frac{1}{q-1}$ folgt.

Zugang über Polynomdivision

Was ist $\frac{1}{1+q}$? Polynomdivision nach <u>aufsteigenden</u> Potenzen liefert

$$\begin{array}{llll}
1 & & & : \ (1+q) \quad = 1-q+q^2-q^3+\cdots \\
1 & \underline{q} & & \\
 & -q & & \\
 & -q & \underline{-q^2} & \\
 & & q^2 & \\
 & & q^2 & \underline{q^3} \\
 & & & -q^3
\end{array}$$

Zugang über Approximationen

Wir <u>approximieren</u> $\frac{1}{1+q}$.

<u>1. Annäherung</u>: $\frac{1}{1+q}\approx 1$ für sehr kleine q.

Verbesserung: $\frac{1}{1+q} = 1 + \boxed{\delta_1}$ mit sehr kleinem δ_1.

Dann $1 = 1 + \delta_1 + q + \underbrace{\delta_1 \cdot q}_{\text{zu vernachlässigen}}$, also $\boxed{\delta_1 = -q}$.

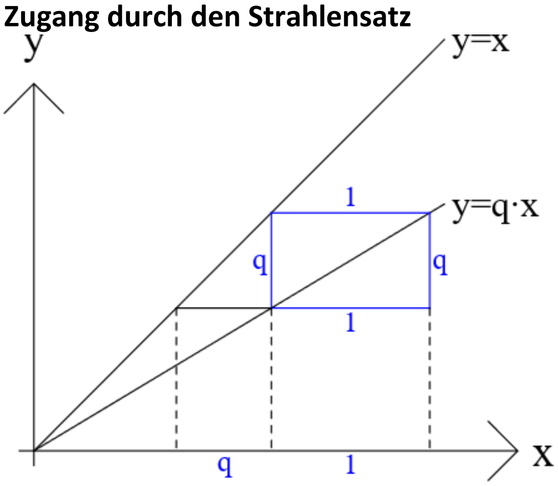
<u>2. Annäherung</u>: $\frac{1}{1+q} \approx 1-q$ (Kontrolle auch durch die 3. binomische Formel)

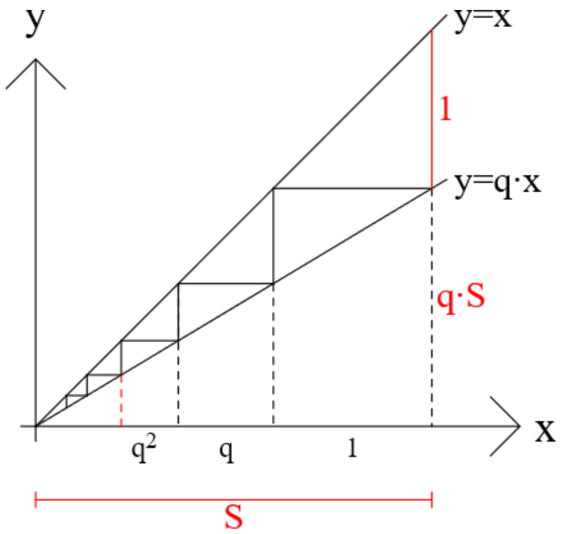
Verbesserung: $\frac{1}{1+q} = 1 - q + \boxed{\delta_2}$ mit sehr kleinem δ_2 (viel kleiner als q).

Dann $1 = 1 - q + \delta_2 + q - q^2 + \underbrace{\delta_2 \cdot q}_{\text{zu vernachlässigen}}$, also $\boxed{\delta_2 = q^2}$.

Und so fort ... Für betragsmäßig hinreichend kleine Werte von q ist also $\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + - \ldots$.

Zugang durch den Strahlensatz





Mit $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ ist $S = q \cdot S + 1$, also $S = \frac{1}{1-q}$.

Ein Spezialfall der geometrischen Reihe

Mit $q = -x^2$ gilt

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots .$$

Die rechte Seite ist für $q = \pm 1$ nicht konvergent, die linke Seite ist für $x = \pm 1$ unproblematisch.

Falsches Einsetzen I

Setzt man in $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}$ außerhalb des Konvergenzbereichs $q = -1$, bekommt man das absurde Ergebnis $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{1+1} = 2$.

Ableitungen der geometrischen Reihe

Leitet man die für $|x| < 1$ korrekte Beziehung $\sum_{k \geq 0} x^k = (1-x)^{-1}$ wiederholt ab, wird man auf folgende Gleichungsfolge geführt:

$$(1-x)^{-2}=\sum_{k\geq 1} k\cdot x^{k-1}$$

$$(1-x)^{-3}=\sum_{k\geq 2}\frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot x^{k-2}=\sum_{k\geq 2}\binom{k}{2}\cdot x^{k-2}$$

$$(1-x)^{-4}=\sum_{k\geq 3}\frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}{2\cdot 3}\cdot x^{k-3}=\sum_{k\geq 3}\binom{k}{3}\cdot x^{k-3}$$

Man erkennt das Bildungsgesetz, nämlich die Taylor-Reihe:

$$(1-x)^{-n}=\sum_{k\geq n-1}\binom{k}{n-1}\cdot x^{k-n+1}=\sum_{i\geq 0}\binom{n-1+i}{i}\cdot x^{i}.$$

Wegen $\binom{-a}{b}=\frac{(-a)\cdot(-a-1)\cdot(-a-2)\cdot\ldots\cdot(-a-b+1)}{b!}=(-1)^{b}\cdot\frac{(a+b-1)!}{(a-1)!\cdot b!}=\boxed{(-1)^{b}\cdot\binom{a+b-1}{b}=\binom{-a}{b}}$

ist

$$(1-x)^{-n}=\sum_{i\geq 0}\binom{-n}{i}\cdot(-x)^{i}$$

und damit auch

$$\boxed{(1+y)^{-n}=\sum_{i\geq 0}\binom{-n}{i}\cdot y^{i}}.$$

Nun sei $0<p,q<1,\ p+q=1,\ p>q,\ y=\frac{q}{p}(<1)$. Dann ist

$$1=(p+q)^{-n}=p^{-n}\cdot(1+y)^{-n}=p^{-n}\cdot\sum_{i\geq 0}\binom{-n}{i}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{i}=\boxed{\sum_{i\geq 0}\binom{-n}{i}\cdot q^{i}\cdot p^{-n-i}=1}.$$

Für $p=q=\frac{1}{2}$ hat man keine Konvergenz, und es ist dann

$$\sum_{i\geq 0}\binom{-n}{i}\cdot q^{i}\cdot p^{-n-i}=2^{n}\cdot\sum_{i\geq 0}\binom{-n}{i}=2^{n}\cdot\sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\cdot\binom{n-1+i}{n-1}.$$

Für $n=1$ hat man die divergente Reihe $2\cdot\sum_{i\geq 0}(-1)^{i}$, für $n=2$ hat man die divergente Reihe $4\cdot\sum_{i\geq 0}(-1)^{i}\cdot(i+1)$.

Falsches Einsetzen II

Setzt man in $\sum_{k\geq 1} k\cdot x^{k-1}=(1-x)^{-2}$ außerhalb des Konvergenzbereichs $q=-1$, bekommt man das absurde Ergebnis $1-2+3-4+5-+\ldots=\frac{1}{4}$.

Setzt man in $\sum_{k\geq 2} k\cdot(k-1)\cdot x^{k-2}=2\cdot(1-x)^{-3}$, außerhalb des Konvergenzbereichs $q=-1$, bekommt man das absurde Ergebnis $1-3+6-+\ldots=\frac{1}{8}$.

Setzt man in $\sum_{k\geq 3} k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot x^{k-3}=6\cdot(1-x)^{-4}$ außerhalb des Konvergenzbereichs $q=-1$, bekommt man das absurde Ergebnis $1-4+10-+\ldots=\frac{1}{16}$.

Integration

Integriert man $\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geq 0} x^k$ im Intervall $\left(-1;\,0\right)$, bekommt man

$\ln 2=-\sum_{k\geq 0}\frac{\left(-1\right)^{k+1}}{k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots$. Die alternierende harmonische Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.