Dr. Jörg Meyer, Hameln

Februar 2024

Vom Goldenen Schnitt zur Fibonacci-Folge

Der Goldene Schnitt ist die positive Wurzel von $\varphi^2 = \varphi + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= 1 \cdot \varphi + 1 \\ \varphi^3 &= 2 \cdot \varphi + 1 \\ \varphi^4 &= 3 \cdot \varphi + 2 \\ \varphi^5 &= 5 \cdot \varphi + 3 \\ \varphi^6 &= 8 \cdot \varphi + 5\end{aligned}$$

Man erkennt das Bildungsgesetz

$$\boxed{\varphi^n = f_n \cdot \varphi + f_{n-1}},$$

wo f_n die Glieder der FIBONACCI-Folge mit $f_1 = f_2 = 1;\ \ldots, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ darstellen:

f_{-6}	f_{-5}	f_{-4}	f_{-3}	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8

Das eingekastelte Bildungsgesetz gilt auch für negative Exponenten.

Hat $\varphi^2 = \varphi + 1$ die Lösungen $G = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ g = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, so gilt auch $G^n = f_n \cdot G + f_{n-1};\ g^n = f_n \cdot g + f_{n-1}$.

Subtraktion liefert $f_n = \frac{G^n - g^n}{G - g} = \boxed{\frac{G^n - g^n}{\sqrt{5}} = f_n}$ (BINET-Form).

Daher konvergiert $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{G^{n+1} \cdot \left(1 - \left(\frac{g}{G}\right)^{n+1}\right)}{G^n \cdot \left(1 - \left(\frac{g}{G}\right)^n\right)} \xrightarrow{n\to\infty} G$.