Von Fibonacci zu Heron[1]

Der Zusammenhang zwischen Folgen mit dem Bildungsgesetz $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ und iterativen Lösungen von quadratischen Gleichungen der Form $x^2 = A \cdot x + B$ wird untersucht. Anschließend wird diese Strategie mit dem Heron-Verfahren in Beziehung gesetzt. Hieraus wird eine Beschleunigung des Heron-Verfahrens abgeleitet.

Verallgemeinert man die Fibonacci-Folge, wird man auf Folgen mit dem Bildungsgesetz $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ geführt. Es stellt sich heraus, dass (unter recht allgemeinen Voraussetzungen) die Quotienten $\frac{g_{n+1}}{g_n}$ für $n \to \infty$ (wie bei Fibonacci) gegen die betragsgrößte und für $n \to -\infty$ gegen die betragskleinste Lösung von $x^2 = A \cdot x + B$ konvergieren. Hiermit lassen sich die gängigen Iterationsverfahren zur Lösung von $x^2 = A \cdot x + B$ (nämlich $x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n}$ und $x_{n+1} = \frac{B}{x_n - A}$) erklären.

Ebenso aber wird auch ein Licht auf die Verfahren von Theon und Heron zur iterativen Lösung von $x^2 = B$ geworfen. Der Grund für die schnelle Konvergenz des Heron-Verfahrens wird deutlich.

Da die iterative Lösung von quadratischen Gleichungen über $x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n}$ bzw. $x_{n+1} = \frac{B}{x_n - A}$ mit dem Banach'schen Fixpunktsatz zu tun hat, der Heron-Algorithmus aber mit dem Newton-Verfahren, so ließe sich die Überschrift dieser Arbeit auch als „Von Banach zu Newton“ formulieren. Ein Ziel der Arbeit ist die Aufdeckung dieses Zusammenhangs; durchblickt man ihn, so ergibt sich eine „Verbesserung von Newton“.

0. Ausgangspunkt

Die durch $f_0 = f_1 = 1;\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ definierte *Fibonacci*-Folge hat die Eigenschaft, dass die Quotienten $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ mit wachsendem n gegen eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$ konvergieren:

n	f_n	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$
0	1	1,000000000
1	1	2,000000000
2	2	1,500000000
3	3	1,666666667
4	5	1,600000000
5	8	1,625000000
6	13	1,615384615
7	21	1,619047619
8	34	1,617647059
9	55	1,618181818
10	89	1,617977528
11	144	1,618055556
12	233	1,618025751
13	377	1,618037135
14	610	1,618032787
15	987	1,618034448
16	1597	1,618033813
17	2584	1,618034056
18	4181	1,618033963
19	6765	

Es stellen sich hier folgende *Fragen:*

- Warum liegt Konvergenz vor?
- Was ändert sich, wenn die Anfangswerte f_0 und f_1 anders gewählt werden?

[1] Erschien in: Didaktik der Mathematik 4, 1993 (279 – 291). Die Fassung hier ist leicht gekürzt.

- Was ändert sich, wenn die Rekursionsvorschrift anders gewählt wird, wenn also statt der Fibonacci-Folge (f_n) die durch $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ definierte Folge (g_n) betrachtet wird? Konvergieren auch hier die Quotienten $\frac{g_{n+1}}{g_n}$ mit wachsendem n gegen eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = A \cdot x + B$, und wenn ja, gegen welche der beiden Lösungen?
- Wie erhält man diejenige Folge, deren Quotienten gegen die andere Lösung von $x^2 = A \cdot x + B$ konvergieren?
- Welcher Zusammenhang besteht zu bekannten iterativen Lösungsstrategien bei quadratischen Gleichungen?
- Kann man die zu entwickelnden Verfahren benutzen, um Wurzeln iterativ zu bestimmen, und wie hängen diese Iterationen mit bekannten Algorithmen (z. B. Heron) zusammen?

1. Linear rekurrente Folgen und Binetform

Eine durch $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ mit $B \neq 0$ mit irgendwelchen Anfangswerten g_0 und g_1 definierte Folge heißt *linear rekurrent vom Grad 2*. Weder die Anfangswerte g_0 und g_1 noch die Koeffizienten A und B müssen dabei ganzzahlig sein.

Kurzschreibweise: $(g_n) \in LR_2(A;\ B)$ oder, da die Folge durch g_0 und g_1 eindeutig bestimmt ist, $(g_0;\ g_1) \in LR_2(A;\ B)$.

Teilt man die Rekursionsgleichung durch g_n, so folgt $\frac{g_{n+2}}{g_n} = A \cdot \frac{g_{n+1}}{g_n} + B$.

Falls also $\frac{g_{n+1}}{g_n}$ für wachsende n überhaupt konvergiert, so gilt, wenn der Grenzwert x heißt, $x^2 = A \cdot x + B$.

Für das Weitere setzen wir voraus, dass

g_n nie verschwindet und dass

$A^2 + 4 \cdot B \geq 0$ ist.

Ob $\frac{g_{n+1}}{g_n}$ für wachsende n überhaupt konvergiert, lässt sich auf verschiedene Weise untersuchen; eine der Möglichkeiten besteht in folgender *Verfahrensweise*[2]:
Die quadratische Gleichung $x^2 = A \cdot x + B$ habe die Lösungen Λ und λ. Ist $v_n = s \cdot \Lambda^n + t \cdot \lambda^n$ mit irgendwelchen Konstanten s und t, so gilt $v_{n+2} = A \cdot v_{n+1} + B \cdot v_n$, wie man unter Benutzung des Vieta'schen Wurzelsatzes leicht nachrechnet. Das bedeutet aber: Wählt man die Konstanten s und t so, dass $v_0 = g_0$ und $v_1 = g_1$ gilt, dann ist $v_n = g_n$ für alle n richtig.
Das zur Konstantenwahl gehörige lineare Gleichungssystem lautet

$$s + t = g_0$$
$$s \cdot \Lambda + t \cdot \lambda = g_1$$

und hat als Lösungen $s = \frac{\lambda \cdot g_0 - g_1}{\lambda - \Lambda}$ und $t = -\frac{\Lambda \cdot g_0 - g_1}{\lambda - \Lambda}$.
Man sieht also, dass man die Konstanten *nicht* in der angegebenen Weise wählen kann, wenn beide Lösungen der quadratischen Gleichung zusammenfallen.
Aus diesem Grunde machen wir für den weiteren Fortgang der Überlegungen die Voraussetzung, dass

$A^2 + 4 \cdot B > 0$ ist.

Zusammenfassend folgt somit

[2] Diese Verfahrensweise mag hier als Trick erscheinen. Das wird aber in Kauf genommen, um den Gang der Handlung zunächst nicht zu stören. Wie man auf den Trick kommt, ist an dieser Stelle nicht leicht einzusehen; vgl. den Exkurs im folgenden Abschnitt.

Satz 1: Für eine durch $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ mit $A^2 + 4 \cdot B > 0$ und $B \neq 0$ definierte linear rekurrente Folge gilt:

Die quadratische Gleichung $x^2 = A \cdot x + B$ habe die Lösungen Λ und λ, und es seien

$s = \frac{\lambda \cdot g_0 - g_1}{\lambda - \Lambda}$ und $t = -\frac{\Lambda \cdot g_0 - g_1}{\lambda - \Lambda}$.

Dann ist $g_n = s \cdot \Lambda^n + t \cdot \lambda^n$ für alle n.

Die Darstellung $g_n = s \cdot \Lambda^n + t \cdot \lambda^n$ heißt *Binet*form.

2. Exkurs: Wie man auf die Binetform kommt[3]

$LR_2(A;\ B)$ als Menge der linear rekurrenten Folgen (g_n) mit der Rekursionsvorschrift $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ bildet einen Vektorraum.

Eine mögliche Basis dieses Vektorraums ist durch (1; 0) und (0; 1) gegeben: $(g_0;\ g_1) = g_0 \cdot (1;\ 0) + g_1 \cdot (0;\ 1)$, d.h. ausführlicher: $(g_0;\ g_1;\ g_2;\ ...) = g_0 \cdot (1;\ 0;\ B;\ ...) + g_1 \cdot (0;\ 1;\ A;\ ...)$.

Eine geometrische Folge $\left(q^n\right)$ ist Element dieses Vektorraums, falls $q^{n+2} = A \cdot q^{n+1} + B \cdot q^n$ ist. falls also $q = \Lambda$ oder $q = \lambda$ ist. Wie man im letzten Abschnitt gesehen hat, bilden $(1;\ \Lambda)$ und $(1;\ \lambda)$ für den Fall, dass $\Lambda \neq \lambda$ ist, auch eine Basis: $(g_0;\ g_1) = s \cdot (1;\ \Lambda) + t \cdot (1;\ \lambda)$; d.h. ausführlicher:

$$(g_0;\ g_1;\ g_2;\ g_3;\ ...) = s \cdot \left(1;\ \Lambda;\ \Lambda^2;\ \Lambda^3;\ ...\right) + t \cdot \left(1;\ \lambda;\ \lambda^2;\ \lambda^3;\ ...\right).$$

(Hier bat man auf der Schule ein nichtgeometrisches Beispiel für einen Vektorraum, und da man den Begriff der Basis braucht, treibt man etwas mehr als „Strukturerkennungsdienst".)

Eine andere Möglichkeit, auf die Binetform zu kommen, besteht in der Betrachtung der zu $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ gehörenden erzeugenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot x^n = \frac{g_0 + (g_1 - A \cdot g_0) \cdot x}{1 - A \cdot x - B \cdot x^2} = \frac{s}{1 - x \cdot \Lambda} + \frac{t}{1 - x \cdot \lambda} = s \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \Lambda^n + t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \lambda^n .$$

Einen weiteren, Computer-unterstützten experimentellen Weg beschreibt Herget [3, S.13-15].

3. Konvergenz

Die Binetform ist ein geeignetes Mittel, um Konvergenzfragen anzugehen. Es ist nämlich

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{s \cdot \Lambda^{n+1} + t \cdot \lambda^{n+1}}{s \cdot \Lambda^n + t \cdot \lambda^n} .$$

Man sieht sofort: Ist $\frac{g_1}{g_0} = \Lambda$ oder $\frac{g_1}{g_0} = \lambda$, so ist $\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{g_1}{g_0}$ für alle n.

Es sei nun $|\Lambda| > |\lambda|$. Dann folgt:

Ist $\frac{g_1}{g_0} \neq \lambda$ (d.h. $s \neq 0$), so ist $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \Lambda$.

Ist $\frac{g_1}{g_0} \neq \Lambda$ (d.h. $t \neq 0$), so ist $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \lambda$.

(Mit der letzten Aussage ist auch die Frage im Abschnitt 0, wie man zur „anderen Lösung" kommt, beantwortet.)

Die Konvergenz ist unabhängig von s und t, d. h. unabhängig von den Anfangswerten g_0 und g_1!

Sind beide Lösungen betragsgleich (das ist der Fall bei $A = 0$; gleiche Lösungen hatten wir schon zu Beginn ausgeschlossen), wird i. a. keine Konvergenz vorliegen. Es wird also zusätzlich $A \neq 0$ vorausgesetzt. Zusammenfassend lässt sich formulieren:

---

[3] Der Kenner linearer Differenzengleichungen überschlage diesen Abschnitt.

Satz 2: Es sei $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ mit $A^2 + 4 \cdot B > 0$ und $A \neq 0$ und $B \neq 0$.

Ferner sei Λ die betragsgrößte und λ die betragskleinste Lösung von $x^2 = A \cdot x + B$. Dann folgt:

Ist $\frac{g_1}{g_0} = \Lambda$ oder $\frac{g_1}{g_0} = \lambda$, so gilt $\frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{g_1}{g_0}$ für alle n.

Ist $\frac{g_1}{g_0} \neq \lambda$ und ist $g_n \neq 0$ für $n \geq 0$, so ist $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \Lambda$.

Ist $\frac{g_1}{g_0} \neq \Lambda$ und ist $g_n \neq 0$ für $n \leq 0$, so ist $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{g_{n+1}}{g_n} = \lambda$.

Falls Konvergenz vorliegt, so ist der Grenzwert von den Anfangswerten g_0 und g_1 unabhängig.

Die Konvergenzaussagen lassen sich kurz so darstellen:

$$\lambda \leftarrow \ldots ; \frac{g_{-2}}{g_{-3}}; \frac{g_{-1}}{g_{-2}}; \frac{g_0}{g_{-1}}; \frac{g_1}{g_0}; \frac{g_2}{g_1}; \frac{g_3}{g_2}; \ldots \to \Lambda ;$$

dabei liegt die Folge

$$\ldots; g_{-3}; g_{-2}; g_{-1}; g_0; g_1; g_2; g_3; \ldots$$

zugrunde.

Bildet man nun den Limes für $n \to -\infty$, so ist die Umbenennung

$$\ldots; g_{-2} =: h_2; g_{-1} =: h_1; g_0 =: h_0; g_1 =: h_{-1}; g_2 =: h_{-2}; \ldots$$

sinnvoll. Für die so definierte Folge (h_n) kann man zwar unschön, aber kurz sagen:

(h_n) ist (g_n) rückwärts.

Die Folge (h_n) ist natürlich auch linear rekurrent, und zwar mit dem Bildungsgesetz

$$h_{n+2} = -\frac{A}{B} \cdot h_{n+1} + \frac{1}{B} \cdot h_n$$

und mit der Konvergenz

$$\lambda \leftarrow \ldots ; \frac{h_2}{h_3}; \frac{h_1}{h_2}; \frac{h_0}{h_1}; \frac{h_{-1}}{h_0}; \frac{h_{-2}}{h_{-1}}; \frac{h_{-3}}{h_{-2}}; \ldots \to \Lambda .$$

Die zu (h_n) gehörige quadratische Gleichung[4] $x^2 = -\frac{A}{B} \cdot x + \frac{1}{B}$ hat dementsprechend die Lösungen $\frac{1}{\lambda}$ und $\frac{1}{\Lambda}$.

Für die Fibonacci-Folge beispielsweise ist die „Fibonacci-rückwärts-Folge" (e_n) gegeben durch

$e_0 = e_1 = 1$; $e_{n+2} = -e_{n+1} + e_n$; die Quotienten $\frac{e_n}{e_{n+1}}$ konvergieren gegen $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$:

n	e_n	$\frac{e_n}{e_{n+1}}$
0	1	1
1	1	
2	0	0
3	1	-1
4	-1	-0,5
5	2	-0,66666667
6	-3	-0,6
7	5	-0,625
8	-8	-0,61538462
9	13	-0,61904762
10	-21	-0,61764706
11	34	-0,61818182

[4] Diese tauchte als Nennerpolynom in der erzeugenden Potenzreihe zu (g_n) auf!

12	-55	-0,61797753
13	89	-0,61805556
14	-144	-0,61802575
15	233	-0,61803714
16	-377	-0,61803279
17	610	

4. Zusammenhang mit anderen Iterationsstrategien

Quadratische Gleichungen $x^2 = A \cdot x + B$ kann man sowohl durch *quadratische Ergänzung* als auch *iterativ* lösen. Die letztere Vorgehensweise ist numerisch von Vorteil. Es bieten sich die beiden Iterationen

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n} \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{B}{x_n - A}$$

an. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Formeln und den Ergebnissen des vorletzten Abschnitts besteht in den Umbenennungen

$$\frac{g_{n+1}}{g_n} =: x_n \quad \text{bzw.} \quad \frac{h_n}{h_{n+1}} =: x_n .$$

Die Rekursionsgleichung $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$ schreibt sich dann als $x_{n+1} \cdot x_n = A \cdot x_n + B$, also ist

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n} .$$

Ist umgekehrt (x_n) eine Folge mit $x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n}$, so sei

$$g_0 := 1;\ g_1 := x_0 \cdot g_0;\ \ldots;\ g_{n+1} := x_n \cdot g_n \quad (\text{also } g_{n+1} = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n).$$

Dann ist $g_{n+2} = A \cdot g_{n+1} + B \cdot g_n$.

Analog schreibt sich die Rekursionsbeziehung $h_{n+2} = -\frac{A}{B} \cdot h_{n+1} + \frac{1}{B} \cdot h_n$ als $B = -A \cdot x_{n+1} + x_n \cdot x_{n+1}$, also ist

$$x_{n+1} = \frac{B}{x_n - A} .$$

Ist umgekehrt (x_n) eine Folge mit $x_{n+1} = \frac{B}{x_n - A}$, so sei[5]

$$h_0 := 1;\ h_1 := \frac{h_0}{x_0};\ \ldots;\ h_{n+1} := \frac{h_n}{x_n} \quad \left(\text{also } h_{n+1} = \frac{1}{x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\right).$$

Dann ist $h_{n+2} = -\frac{A}{B} \cdot h_{n+1} + \frac{1}{B} \cdot h_n$. Somit hat man den

Satz 3: Es sei $A^2 + 4 \cdot B > 0$ und $A \neq 0$ und $B \neq 0$.

Die betragsgrößte Lösung Λ von $x^2 = A \cdot x + B$ lässt sich iterativ durch

$$x_{n+1} = u(x_n) := A + \frac{B}{x_n} \text{ ermitteln,}$$

die betragskleinste Lösung λ von $x^2 = A \cdot x + B$ durch

$$x_{n+1} = v(x_n) := \frac{B}{x_n - A} .$$

Die Funktionen u und v sind zueinander invers.

Dabei muss der Startwert x_0 im ersten Fall so gewählt werden, dass

$$x_0 \neq \lambda \quad \text{und} \quad x_0 \neq v^{-m}(0) \text{ für alle } m \geq 0 \text{ ist;}$$

im zweiten Fall muss

$$x_0 \neq \Lambda \quad \text{und} \quad x_0 \neq u^{-m}(A) \text{ für alle } m \geq 0 \text{ sein.}$$

Im Fall der Konvergenz ist der Limes vom Startwert x_0 unabhängig.

Ist hingegen $x_0 = \Lambda$ oder $x_0 = \lambda$, so gilt $x_n = x_0$ für alle n.

[5] Ist $x_0 = 0$, so beginne man die Rekursion bei x_1. Wegen $B \neq 0$ ist für $n > 0$ stets $x_n \neq 0$.

5. Vorgehensweise bei betragsgleichen Lösungen

Bei den Iterationsverfahren im ersten Abschnitt wurde vorausgesetzt, dass die Lösungen von $x^2 = A \cdot x + B$ verschiedene Beträge haben.

Falls beide Lösungen *gleich* sind (d. h. wenn $A^2 + 4 \cdot B = 0$ ist), reduziert sich die quadratische Gleichung $x^2 = A \cdot x + B$ auf die binomische Formel $x^2 - A \cdot x + \frac{A^2}{4} = \left(x - \frac{A}{2}\right)^2 = 0$, die einfach nach x aufzulösen ist.

Vom Standpunkt der Lösungsfindung ist also hier eine iterative Behandlung uninteressant.
Falls die Lösungen zwar *nicht gleich, aber betragsgleich* sind, ist $A = 0$; die quadratische Gleichung lautet also $x^2 = B$. Hier ist man durchaus an Iterationsverfahren interessiert!

Nun lässt sich die Betragsgleichheit dadurch umgehen, dass man gar nicht versucht, $\sqrt{B}$ zu berechnen, sondern statt dessen diejenige quadratische Gleichung betrachtet, die als Lösungen etwa

$$\sqrt{B} + d \quad \text{und} \quad -\sqrt{B} + d$$

hat. Die zugehörige quadratische Gleichung lautet $x^2 = 2 \cdot d \cdot x + B - d^2$; eine zugehörige linear rekurrente Folge liegt entsprechend in $LR_2\left(2 \cdot d;\ B - d^2\right)$. Aus Satz 2 folgt nun

Satz 4: Ist $(g_n) \in LR_2\left(2 \cdot d;\ B - d^2\right)$ mit $B > 0$ und $B \neq d^2$ und ist $g_n \neq 0$ für $n \geq 0$ und $\frac{g_1}{g_0} \neq -\sqrt{B} + d$,

so ist $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{g_{n+1} - d \cdot g_n}{g_n} = \sqrt{B}$.

5.1 Theon

Setzt man $d = 1$, so gehört zur Berechnung von $\sqrt{2}$ die durch $g_{n+2} = 2 \cdot g_{n+1} + g_n$ definierte linear rekurrente Folge (g_n), deren (modifizierte) Quotienten $\frac{g_{n+1} - g_n}{g_n}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergieren. Diese Folge war übrigens schon *Theon von Smyrna* bekannt [2; S. 92]! Bei Theon handelt es sich um zwei Differenzengleichungen

$$\theta_{n+1} = \theta_n + d_n \quad \text{und} \quad d_{n+1} = d_n + 2 \cdot \theta_n;$$

er betrachtete die Quotienten $\frac{d_n}{\theta_n} = \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\theta_n}$, die gegen $\sqrt{2}$ konvergieren.

Wegen

$$\theta_{n+2} - \theta_{n+1} = d_{n+1} \quad \text{und} \quad \theta_{n+1} - \theta_n = d_n$$

folgt durch Differenzbildung

$$\theta_{n+2} - 2 \cdot \theta_{n+1} + \theta_n = d_{n+1} - d_n = 2 \cdot \theta_n,$$

also ist

$$\theta_{n+2} = 2 \cdot \theta_{n+1} + \theta_n$$

und somit $(\theta_n) \in LR_2(2;\ 1)$, und die Konvergenzaussage folgt aus Satz 4.

Die Anfangswerte bei Theon sind übrigens $\theta_1 = d_1 = 1$, also $\theta_2 = 2$ und $\theta_0 = 0$:

n	θ_n	$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}$
0	0	
1	1	2
2	2	2,5
3	5	2,4
4	12	2,416666667
5	29	2,413793103
6	70	2,414285714
7	169	2,414201183
8	408	2,414215686
9	985	2,414213198
10	2378	2,414213625
11	5741	2,414213552

12	13860	2,414213564
13	33461	2,414213562
14	80782	2,414213562
15	195025	2,414213562
16	470832	2,414213562
17	1136689	

5.2 Heron

Nach Satz 4 berechnet man $\sqrt{B}$ mit Hilfe einer Folge $(g_n) \in LR_2\left(2\cdot d;\ B-d^2\right)$, deren (modifizierte) Quotienten $\frac{g_{n+1}-d\cdot g_n}{g_n}$ gegen $\sqrt{B}$ konvergieren. Die *Konvergenzgeschwindigkeit* lässt sich erheblich steigern, wenn man statt dessen die Quotienten $\frac{g_{2^n+1}-d\cdot g_{2^n}}{g_{2^n}} =: \frac{Z_n}{N_n}$, die ja auch gegen $\sqrt{B}$ konvergieren, betrachtet. Nun wäre dies nicht von praktischem Interesse, wenn sich nicht für N_n und Z_n einfache Rekursionsbeziehungen angeben ließen. Um diese herzuleiten, ist wieder die Binetform für (g_n) ein geeignetes Mittel: Es ist $g_n = s\cdot\Lambda^n + t\cdot\lambda^n$ mit $\Lambda = d+\sqrt{B}$ und $\lambda = d-\sqrt{B}$. Wählt man die *speziellen Startwerte* $g_0 = 0;\ g_1 = d$, so gilt $s = \frac{\lambda\cdot g_0 - g_1}{\lambda-\Lambda} = \frac{d}{2\cdot\sqrt{B}}$ und $t = -\frac{\Lambda\cdot g_0 - g_1}{\lambda-\Lambda} = \frac{-d}{2\cdot\sqrt{B}}$, also $g_n = d\cdot\frac{\Lambda^n-\lambda^n}{2\cdot\sqrt{B}}$.

Mit der Abkürzung $\Omega := \Lambda^{2^n}$ und $\omega := \lambda^{2^n}$ schreibt sich dann der Nenner N_n als $N_n = d\cdot\frac{\Omega-\omega}{2\cdot\sqrt{B}}$ und der Zähler Z_n wegen

$$Z_n = g_{2^n+1} - d\cdot g_{2^n} = d\cdot\frac{\Lambda^{2^n+1}-\lambda^{2^n+1}}{2\cdot\sqrt{B}} - d^2\cdot\frac{\Lambda^{2^n}-\lambda^{2^n}}{2\cdot\sqrt{B}} = d\cdot\frac{\Omega\cdot\Lambda-\omega\cdot\lambda}{2\cdot\sqrt{B}} - d^2\cdot\frac{\Omega-\omega}{2\cdot\sqrt{B}}$$
$$= \frac{d}{2\cdot\sqrt{B}}\cdot\left[\Omega\cdot(\Lambda-d)+\omega\cdot(d-\lambda)\right] = \frac{d}{2\cdot\sqrt{B}}\cdot\left[\Omega\cdot\sqrt{B}+\omega\cdot\sqrt{B}\right] = \frac{d}{2}\cdot(\Omega+\omega)$$

als $Z_n = d\cdot\frac{\Omega+\omega}{2}$; ferner ist $N_{n+1} = d\cdot\frac{\Omega^2-\omega^2}{2\cdot\sqrt{B}}$ und $Z_{n+1} = d\cdot\frac{\Omega^2+\omega^2}{2}$.

Man erkennt, dass eine mögliche Rekursionsbeziehung die folgende ist:

$$N_0 = d;\ Z_0 = d^2;\ d\cdot N_{n+1} = 2\cdot N_n\cdot Z_n;\ d\cdot Z_{n+1} = Z_n^2 + B\cdot N_n^2.$$

Schreibt man $\frac{Z_n}{N_n} =: x_n$, so folgt $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\left(x_n + \frac{B}{x_n}\right)$.

Bei (x_n) handelt es sich also um die nach *Heron* benannte, aber schon den *Babyloniern* bekannte schnell gegen $\sqrt{B}$ konvergierende Folge[6] mit dem Anfangswert $x_0 = d$.

Satz 5: Die Heron-Folge zu $\sqrt{B}$ mit dem speziellen Startwert x_0 entsteht aus $(0;\ x_0) \in LR_2\left(2\cdot x_0;\ B-x_0^2\right)$ durch Konvergenzbeschleunigung.

Literatur:

[1] Becker, O. (Hrsg.): Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1965
[2] Heath, Sir Th.: A history of Greek mathematics. Volume I. New York: Dover Publications 1981
[3] Herget, W.: Probieren, Entdecken, Forschender Unterricht - auch mit dem Computer. In: MU (1989), Heft 4, S. 5-21
[4] Hofmann, J. E.: Über die Annäherung von Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron. In: [1, S.100-123]; ursprünglich in: Iber. DMV 43 (1934), S.187-210

[6] Eine geometrische Veranschaulichung findet sich etwa in [4, S. 105].