Jörg MEYER, Hameln 10. 4. 2025

# Gestauchte Kreise

## Inhalt


Parameterdarstellung des gestauchten Kreises ..... 1
Die beiden Brennpunkte ..... 1
Die Leitgeraden ..... 2
Eine Progression, Teil 1 ..... 2
Abstands-Summen und der Leitkreis ..... 2
Die Ellipsen-Konstruktion mit dem Leitkreis ..... 3
Die Spiegelungseigenschaft ..... 3
Vom Leitkreis zur Leitgerade ..... 4
Der Hauptscheitel-Krümmungskreis und Fortsetzung der Progression ..... 5
Sphäro-elliptische Linsen ..... 5

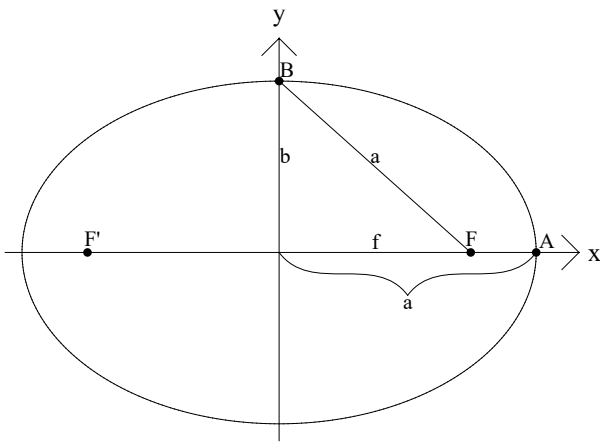

### Parameterdarstellung des gestauchten Kreises

Der Einheitskreis um den Ursprung hat die Gleichung $x^2+y^2=1$ und den allgemeinen Punkt $K(\varphi)=(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ bzw. $K(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2\cdot t}{1+t^2}\right)$. Staucht man ihn in x-Richtung und in y-Richtung, so bekommt man den allgemeinen Punkt $E(\varphi)=(a\cdot\cos\varphi,\ b\cdot\sin\varphi)$. Ein gestauchter Kreis heißt **Ellipse**; die Gleichung lautet $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

Auf der Ellipse liegen die Punkte $E(0°)=A=(a,\ 0)$ und $E(90°)=B=(0,\ b)$.

### Die beiden Brennpunkte

Der Kreis um B mit dem Radius a schneidet die Rechtsachse in den beiden **Brennpunkten** $F=(f,\ 0)$ und $F'=(-f,\ 0)$ mit $\boxed{f^2=a^2-b^2}$.




Damit ist $|BF|+|BF'|=2\cdot a$.
Überraschenderweise gilt auch
$|AF|+|AF'|=(a-f)+(f+a)=2\cdot a$.
Gilt das auch für einen beliebigen Ellipsen-Punkt $E(\varphi)=(a\cdot\cos\varphi,\ b\cdot\sin\varphi)$?
Es ist

$$\begin{aligned}|EF|^2&=a^2\cdot\cos^2\varphi-2\cdot a\cdot f\cdot\cos\varphi+f^2+b^2\cdot\sin^2\varphi\\&=\left(b^2+f^2\right)\cdot\cos^2\varphi-2\cdot a\cdot f\cdot\cos\varphi+\left(a^2-b^2\right)+b^2\cdot\sin^2\varphi\\&=(a-f\cdot\cos\varphi)^2\end{aligned}$$

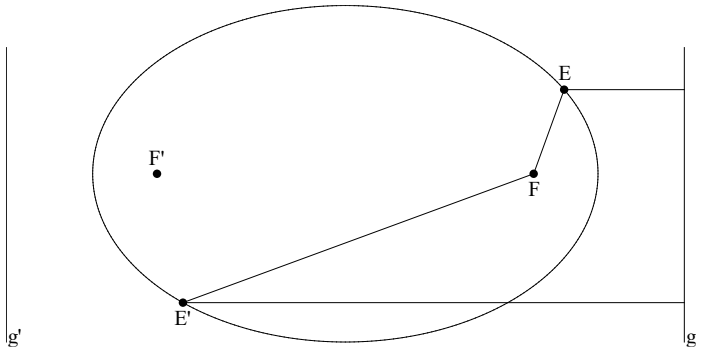
und damit $\boxed{|EF| = a - f \cdot \cos\varphi}$ sowie analog $\boxed{|EF'| = a + f \cdot \cos\varphi}$.

Aus diesem Gleichungspaar lassen sich mehrere Schlüsse ziehen:

## Die Leitgeraden

**Erstens** ist $|EF| = a - f \cdot \cos\varphi = \frac{f}{a} \cdot \left( \frac{a^2}{f} - a \cdot \cos\varphi \right)$, und der Klammerausdruck gibt den Abstand zwischen E und der Geraden g mit $g:\ x = \frac{a^2}{f}$ an. Diese Gerade heißt **Leitgerade**.

Damit gilt: Der Abstand jeden Ellipsenpunkts E zu F ist $\frac{f}{a}$-mal so groß wie der Abstand zwischen E und g.
(Damit lässt sich die Konstruktion einer Parabel aus Leitgerade und Brennpunkt mit Hilfe des APOLLONIUS-Kreises auf die Ellipse übertragen.)
Natürlich gehört auch zu F‘ eine Leitgerade g‘.



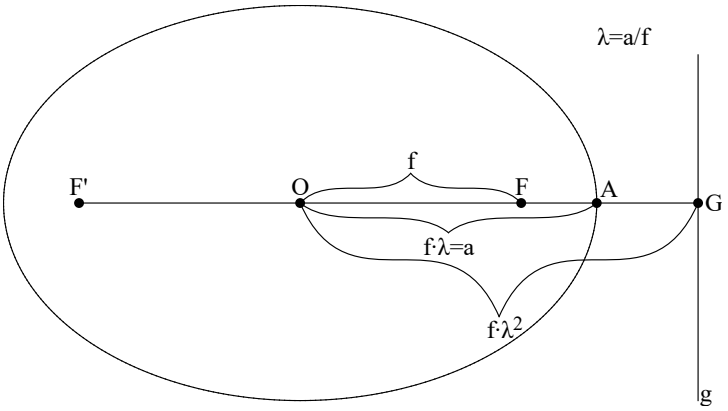

## Eine Progression, Teil 1

Man hat eine **Progression**: Ist $O = (0, 0)$ Koordinaten-Ursprung und Mittelpunkt der Ellipse und G der Schnittpunkt der Leitgerade g mit der Achse F’F, so gilt:

Mit $\boxed{\lambda = \frac{a}{f}}$ ist $F = (\boxed{f}, 0)$,

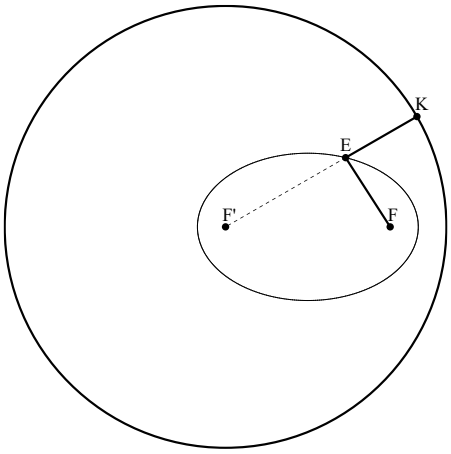
$A = (\boxed{\lambda \cdot f}, 0) = (a, 0)$ und

$G = \left(\boxed{\lambda^2 \cdot f}, 0\right) = \left(\frac{a^2}{f}, 0\right)$.

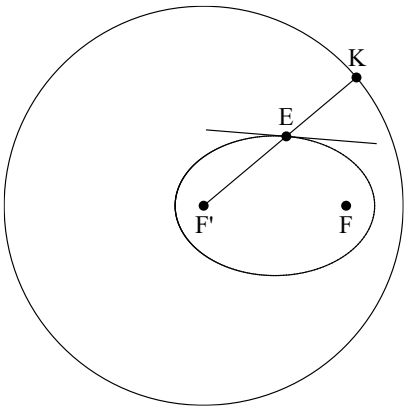



## Abstands-Summen und der Leitkreis

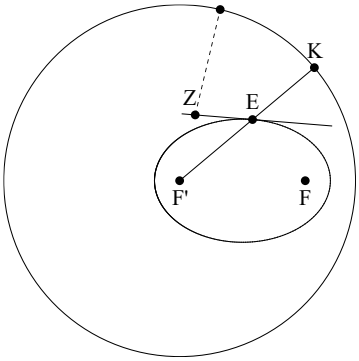
**Zweitens** gilt die Beziehung $\boxed{|EF'| + |EF| = 2 \cdot a}$ für jeden Ellipsenpunkt E.
Schreibt man diese Beziehung als $|EF| = 2 \cdot a - |EF'|$, so bedeutet das, dass jeder Ellipsenpunkt E den gleichen Abstand zu F wie zum **Leitkreis** um F‘ mit dem Radius $2 \cdot a$ hat, wenn F innerhalb dieses Kreises liegt.
„Abstand zum Kreis“ bedeutet den Abstand zum nächstgelegenen Kreis-Punkt K.



## Die Ellipsen-Konstruktion mit dem Leitkreis

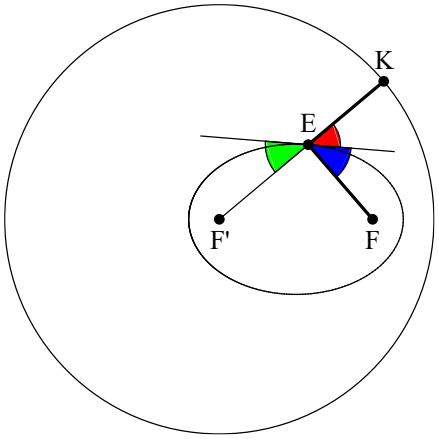



Der Leitkreis führt zu einer einfachen Konstruktion der Ellipse, die analog zur Konstruktion einer Parabel aus Leitgerade und Brennpunkt verläuft:
Der Punkt K wandere auf dem Leitkreis um F‘ mit dem Radius $2 \cdot a$. F liege innerhalb des Leitkreises. Dann hat der Schnittpunkt E von F‘K mit der Mittelsenkrechten zu K und F den gleichen Abstand zu F wie zum Kreis.

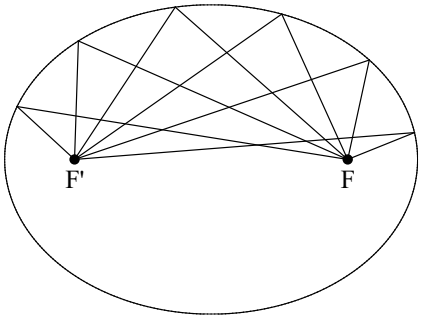



Offenbar ist die Mittelsenkrechte zu K und F **Tangente** in E. Die lässt sich leicht begründen: Wäre auch der Punkt Z auf der Mittelsenkrechten ein Ellipsenpunkt, so wäre zwar $ZF = ZK$, aber ZK ist größer als der Abstand von Z zum Kreis. Daher haben Ellipse und die Mittelsenkrechte nur den Punkt E gemeinsam.

## Die Spiegelungseigenschaft

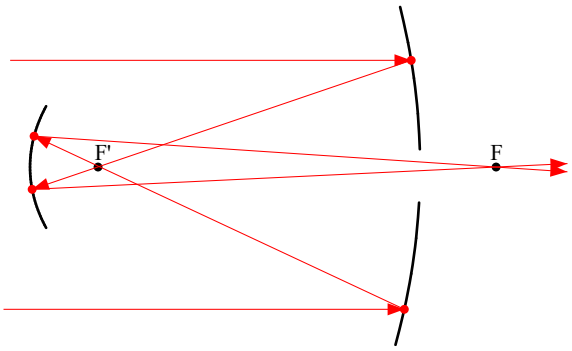



Aus dieser Konstruktion folgt:
Der rote und der grüne Winkel sind Scheitelwinkel. Wegen $|EF| = |EK|$ haben der grüne- und der blaue Winkel gleiche Größe.
Ein von F ausgehender Lichtstrahl wird an der Ellipsentangente reflektiert. Da der grüne und der blaue Winkel gleiche Größe haben, wird der Lichtstrahl in Richtung F‘ reflektiert. Daher heißen F und F‘ **Brenn**-Punkte.



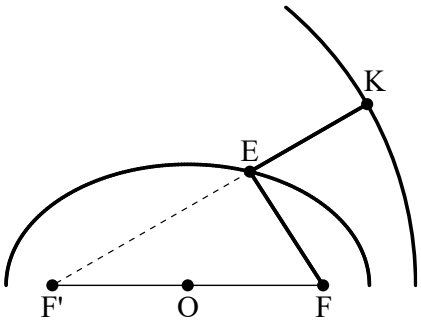

Damit hat man den **Ellipsenspiegel**
(Flüstergalerie: Nur Schallwellen, die von F ausgehen, kommen bei F‘ an).

Eine weitere Anwendung ist das Teleskop nach GREGORY:
Von links fällt achsenparalleles Licht auf eine Parabel mit Brennpunkt F‘. Nach der Reflexion an der Parabel gehen die Strahlen durch F‘ und werden an der Ellipse mit den Brennpunkten F‘ und F reflektiert. Nach der Reflexion an der Ellipse gehen alle Strahlen durch F.

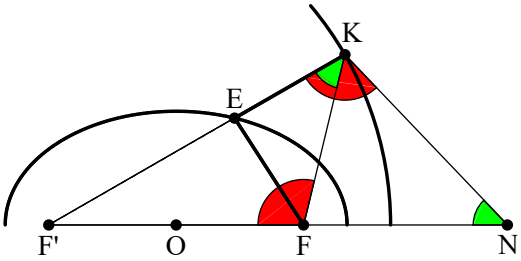



## Vom Leitkreis zur Leitgerade

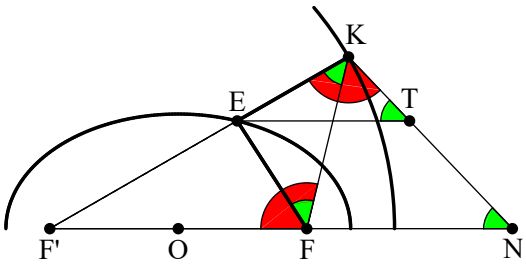
Oben wurde ein analytischer Weg dargestellt. Ein synthetischer Weg[1] ist der folgende:
Ausgangspunkt ist der (fette) Leitkreis um F‘ mit Radius $2 \cdot a$.
Zum Kreis-Punkt K gehört der Ellipsen-Punkt E. Das Verhältnis $\lambda = \frac{a}{f}$ tritt als Verhältnis $\frac{|F'K|}{|F'F|}$ auf.



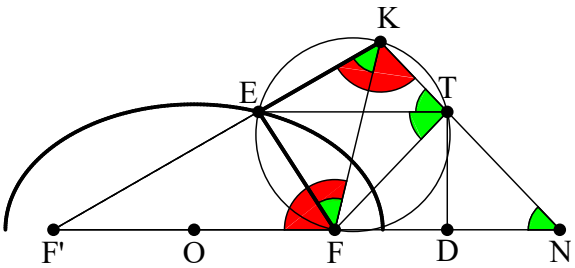

Nun wird der Punkt N so konstruiert, dass das Dreieck F’FK ähnlich ist zum Dreieck F’KN; gleichfarbige Winkel haben gleiche Größe.
Dann ist $\lambda = \frac{|F'K|}{|F'F|} = \frac{|F'N|}{|F'K|}$, also $|F'N| = \lambda \cdot 2 \cdot a$.
Daher ist N unabhängig von K oder E ein fester Punkt.
Mit $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $n = \lambda \cdot 2 \cdot a - f$.




Man beachte $|EF| = |EK|$, daher haben die grünen Winkel bei F und K gleiche Größe.
Nun sei ET zur Hauptachse der Ellipse parallel und T auf KN.
Über EK sind die Winkel bei T und F gleich, also liegen E, K, F, T auf einem Kreis.




Dann sind über EF die Winkel bei K und bei T von gleicher Größe.
Nennt man den grünen Winkel α, so ist $\measuredangle NTF = 180° - 2 \cdot \alpha$, also ist $\sphericalangle DFT = \alpha$, und damit ist das Dreieck FNT gleichschenklig, und die Lotgerade TD durch T zu F’F ist Mittelsenkrechte zu FN.




[1] Idee: H. G. Zeuthen (1882): Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelchnittslehre. Leipzig: Teubner, S. 32 f.

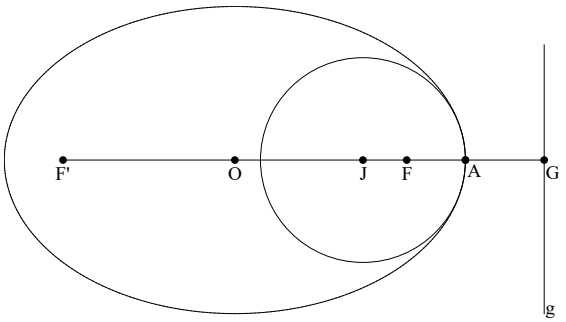
Ist $D=\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$, so ist $d=\frac{f+n}{2}=\lambda\cdot a$, es handelt sich somit bei D um den oben mit G bezeichneten Punkt, und DT ist die (zu f gehörige) Leitgerade.

Weiterhin ist $\frac{|ET|}{|EF|}=\frac{|ET|}{|EK|}=\frac{|F'N|}{|F'K|}=\lambda$; der Abstand $|EF|$ ist also in der Tat $\frac{1}{\lambda}=\frac{f}{a}$-mal so groß wie der Abstand von E zur Leitgeraden.

## Der Hauptscheitel-Krümmungskreis und Fortsetzung der Progression

Der Mittelpunkt des Hauptscheitel-Krümmungskreises liegt auf der Achse F'F. Ein Kreis um $J=(j, 0)$ durch $A=(a, 0)$ hat die Gleichung $(x-j)^2+y^2=(a-j)^2$; er schneidet die Ellipse mit dem allgemeinen Punkt $E(t)=\left(a\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\cdot\frac{2\cdot t}{1+t^2}\right)$ für $t^2\cdot\left(a\cdot j\cdot t^2+a\cdot j-f^2\right)=0$ (CAS).

Man hat also bei $t=0$ eine doppelte Schnittstelle. Diese ist sogar dreifach, wenn der Klammerausdruck für $t=0$ verschwindet, wenn also $j=\frac{f^2}{a}=\frac{f}{\lambda}$ ist. Dann ist der Kreis um $J=(j, 0)$ durch A der **Hauptscheitel-Krümmungskreis**.




Der Punkt J ergänzt die oben erwähnte **Progression**: Mit $\lambda=\frac{a}{f}$ und $O=(0, 0)$ als Koordinaten-Ursprung und Mittelpunkt der Ellipse gilt:

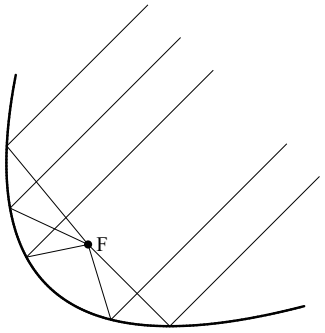
$$J=(j, 0)=\left(\boxed{\frac{f}{\lambda}}, 0\right),\ F=\left(\boxed{f}, 0\right),\ A=\left(\boxed{\lambda\cdot f}, 0\right)=(a, 0),\ G=\left(\boxed{\lambda^2\cdot f}, 0\right)=\left(\frac{a^2}{f}, 0\right)$$

mit G als Schnittpunkt der Leitgerade g mit der Achse F'F.

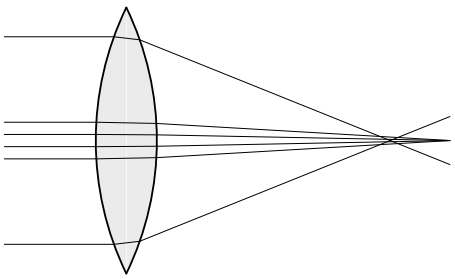
## Sphäro-elliptische Linsen

Bekanntlich werden alle achsenparallele Strahlen an einer Parabel-Innenwand so reflektiert, dass sie anschließend durch den Brennpunkt F gehen.

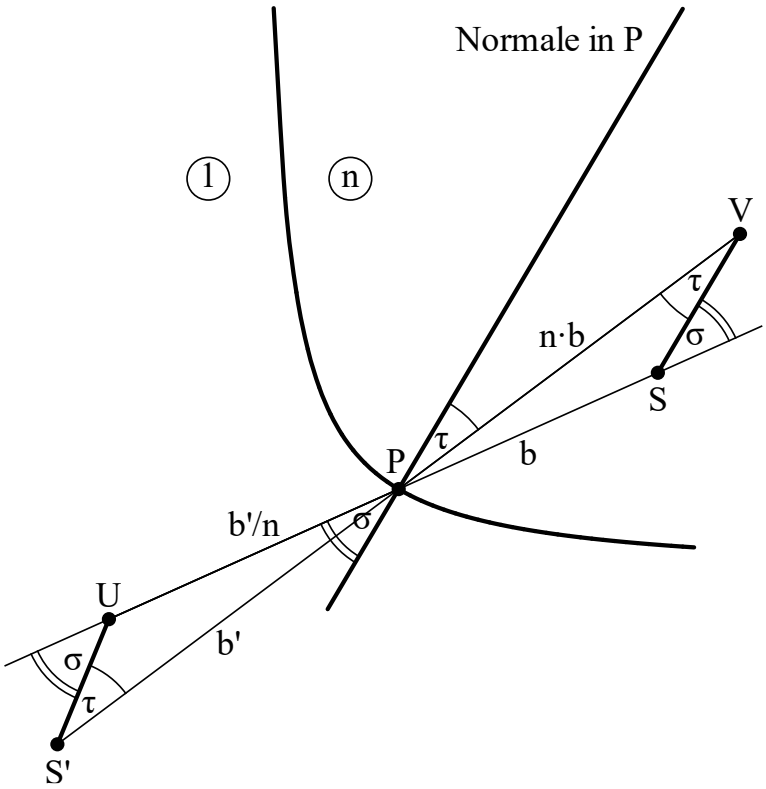
Man fragt sich, ob man diesen Effekt auch durch eine Linse erreichen kann.




Die gewöhnliche (aus zwei Kugelteilen bestehende) Sammellinse erfüllt diese Eigenschaft nur für achsennahe Strahlen, wie man schon im Physik-Unterricht gelernt hat.



Wie konstruiert man gebrochene Strahlen? Die wohl einfachste Methode stammt von Ferdinand LIPPICH (1838 - 1913)[2]:

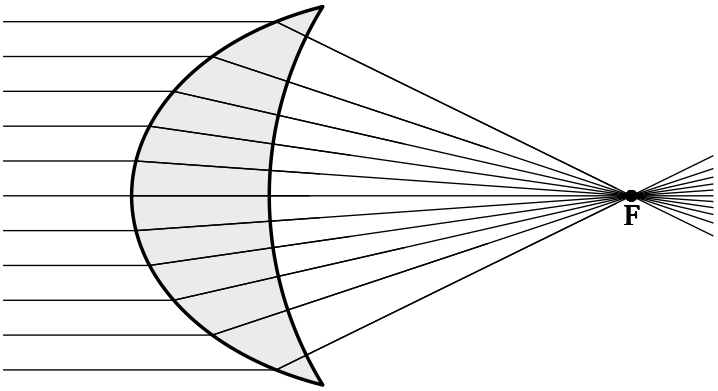



Links unterhalb der Kurve sei Luft mit dem Brechungsindex 1, rechts oberhalb der Kurve sei Glas (oder ein anderes Linsenmaterial mit dem Brechungsindex $n(>1)$.

Von U kommt ein Lichtstrahl, der die Begrenzungskurve in P trifft. Die Normale in P ist fett gezeichnet. S liegt irgendwo auf der Verlängerung von UH. SV ist zur Normalen in P parallel, und es gelte $\frac{PV}{PS}=n$. Wegen des Sinussatzes im Dreieck PSV gilt $\frac{\sin(180°-\sigma)}{n\cdot b}=\frac{\sin\tau}{b}$ bzw. $\sin\sigma=n\cdot\sin\tau$, also das Brechungsgesetz. Damit liegt V auf dem gebrochenen Strahl.

Kommt umgekehrt der Lichtstrahl von V, so gilt mit derselben Konstruktion und Argumentation, dass U auf dem gebrochenen Strahl liegt.

Nun treffen achsenparallele Strahlen von links auf den äußeren Rand einer Ellipse.
Überraschenderweise treffen sie sich nach der doppelten Brechung in einem Punkt F im Inneren der Ellipse.
. Begrenzt man die Linse rechts durch eine Kugel um F, so werden die Strahlen beim Austritt aus der Linse gar nicht gebrochen.

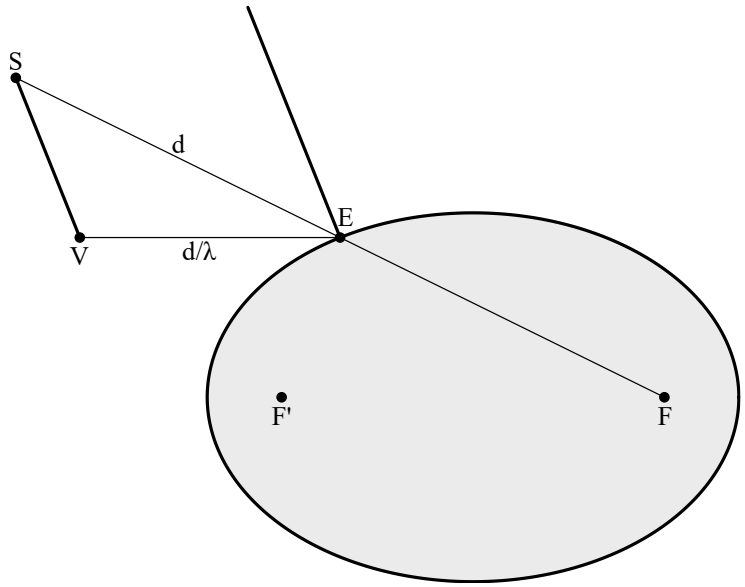



Warum ist das so? Da der Lichtweg umkehrbar ist, beobachten wir einen von F ausgehenden Strahl und argumentieren analytisch:

[2] W. Hinrichs (1911): Einführung in die geometrische Optik. Leipzig: G.J.Göschen'sche Verlagshandlung.

Die Ellipse hat den allgemeinen Punkt $E=\begin{pmatrix} a\cdot\cos\varphi \\ b\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$. Die (fette) Normale zu E hat die Normalengleichung $X\cdot E'=E\cdot E'$. Spiegelt man F an E, bekommt man $S=2\cdot E-F$ mit

$$d=|ES|=|EF|=a-f\cdot\cos\varphi .$$




Ein allgemeiner Punkt auf der durch S verlaufenden Parallele zur Normalen zu E hat die Form

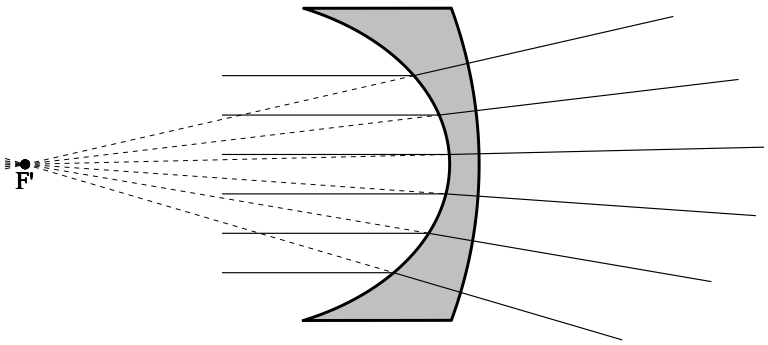
$$X=S+\sigma\cdot E'^{\perp}=2\cdot E-F+\sigma\cdot E'^{\perp}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\cdot a\cdot\cos\varphi-f \\ 2\cdot b\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix} b\cdot\cos\varphi \\ a\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt mit der Parallelen durch E zur Hauptachse F‘F wird beschrieben durch

$\begin{pmatrix} 2\cdot a\cdot\cos\varphi-f \\ 2\cdot b\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix} b\cdot\cos\varphi \\ a\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dots \\ b\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}$ bzw. durch $\sigma=\frac{-b}{a}$ und liefert

$$V=\begin{pmatrix} 2\cdot a\cdot\cos\varphi-f \\ 2\cdot b\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}-\frac{b}{a}\cdot\begin{pmatrix} b\cdot\cos\varphi \\ a\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a^2+f^2}{a}\cdot\cos\varphi-f \\ b\cdot\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Damit ist $|VE|=a\cdot\cos\varphi-\left(a+\frac{f^2}{a}\right)\cdot\cos\varphi+f=\frac{f}{a}\cdot(a-f\cdot\cos\varphi)=\frac{f}{a}\cdot d=\frac{d}{\lambda}$, wie gewünscht.

Die Ellipse muss daher den Brechungsindex $\lambda=\frac{a}{f}$ haben.

Fallen achsenparallele Lichtstrahlen auf die Innenwand einer Ellipse (links) und wird die Linse rechts wieder durch eine Kugel mit Mittelpunkt F‘ gebildet, so wirkt die Anordnung als Zerstreuungslinse: Alle gebrochenen Strahlen scheinen von F‘ zu kommen.
Die Linse wird links im Schnitt von einer Ellipse und rechts von einem Kreis um F‘ begrenzt.