Besondere Punkte des Dreiecks[1]

Einleitung

Im Geometrieunterricht des Sekundarbereichs I haben die Schüler die Mittelsenkrechten, die Winkelhalbierenden usw. als besondere Linien des Dreiecks sowie – damit verbunden – die jeweiligen Schnittpunkte als besondere Punkte kennengelernt. Stehen im Sekundarbereich II Trigonometrie und etwas Lineare Algebra (Geraden und deren Schnittpunkte) zur Verfügung, so lassen sich die oben erwähnten Gebiete auch rechnerisch behandeln. Identifiziert man (der Einfachkeit halber) Ortsvektoren und Punkte, so ergeben sich beispielsweise die folgenden Ergebnisse (das Dreieck ABC sei in üblicher Weise benannt):

Seitenhalbierendenschnittpunkt $S = \frac{A+B+C}{3}$,

(Innen–)Winkelhalbierendenschnittpunkt $W = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a+b+c}$, usw.

Die Struktur dieser Formeln legt eine (zunächst als Abkürzung interpretierbare) Schreibweise $S = (1:1:1)$, $W = (a:b:c)$ nahe; der Doppelpunkt dient der Unterscheidung gegenüber den gewöhnlichen affinen Koordinaten. Nun ist es nur noch ein kleiner Schritt, diese „neuen" Koordinaten als homogene baryzentrische Koordinaten aufzufassen (zum Zusammenhang mit Schwerpunkten vgl. etwa [1] Kap. 13) und mit ihnen konsequent zu rechnen. Die Vorteile werden bald offensichtlich; das Kopunktalitätskriterium (Satz von Ceva) ist besonders einfach zu beweisen und anzuwenden, Schnittpunktsbestimmungen verlaufen alle nach demselben Schema.

Im folgenden wird der baryzentrische Kalkül (der im Unterricht natürlich nicht am Anfang stehen sollte!) nur soweit vorgestellt, wie er zur Berechnung der vier „klassischen" Punkte nötig ist. Aber auch weniger bekannte Punkte lassen sich mit dieser Methode ebenso einfach berechnen.

Elemente des baryzentrischen Kalküls

Ist ABC ein Dreieck mit üblicher Benennung und rechnet man mit Punkten so wie mit den zugehörigen Ortsvektoren, dann läßt sich jeder Punkt schreiben als $P = \frac{p \cdot A + q \cdot B + r \cdot C}{p+q+r} =: (p:q:r)$.

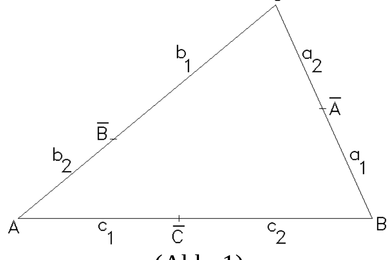
Wir nennen p, q, r baryzentrische Koordinaten. Sie sind homogen.

Man überzeugt sich leicht davon, daß z.B. gilt:

$A = (1:0:0)$; $\bar{A} = (0:a_2:a_1)$

$B = (0:1:0)$; $\bar{B} = (b_1:0:b_2)$

$C = (0:0:1)$; $\bar{C} = (c_2:c_1:0)$



(Abb. 1)

(Lesebeispiel zu Abb. 1: $\bar{C}$ teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis $c_1 : c_2$.)

Eine Gerade hat die lineare homogene Gleichung $U \cdot x + V \cdot y + W \cdot z = 0$; sie werde daher kurz mit $[U:V:W]$ bezeichnet.

Trivialerweise gilt nun, daß der Punkt $(p:q:r)$ genau dann auf der Geraden $[U:V:W]$ liegt, wenn $p \cdot U + q \cdot V + r \cdot W = 0$ ist.

[1] In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984, S. 235 – 238.

Durch Einsetzen läßt sich leicht verifizieren, daß

(1) $\left[q_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot q_2 \;:\; r_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot r_2 \;:\; p_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot p_2\right]$
die Gerade durch die Punkte $(p_1 : q_1 : r_1)$ und $(p_2 : q_2 : r_2)$ ist und daß

(2) $\left[V_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot V_2 \;:\; W_1 \cdot U_2 - U_1 \cdot W_2 \;:\; U_1 \cdot V_2 - V_1 \cdot U_2\right]$
der Schnittpunkt der Geraden $[U_1 : V_1 : W_1]$ und $[U_2 : V_2 : W_2]$ ist.

Mit Hilfe der Formeln (1) und (2) läßt sich nun schon der für die Anwendungen grundlegende Satz von Ceva beweisen; dazu sind die Gleichungen der Ecktransversalen (vgl. Abb. 1) nötig:

$$AB = [0:0:1]; \quad A\overline{A} = [0 : a_1 : -a_2]$$
$$BC = [1:0:0]; \quad B\overline{B} = [b_2 : 0 : -b_1]$$
$$CA = [0:1:0]; \quad C\overline{C} = [c_1 : -c_2 : 0]$$

Satz von Ceva: Bezeichnungen wie in Abb. 1.

Die Geraden $A\overline{A}$, $B\overline{B}$ und $C\overline{C}$ schneiden sich genau dann in einem Punkt P, wenn $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2$ gilt. Es ist dann $P = \left(1 : \frac{c_1}{c_2} : \frac{b_2}{b_1}\right)$.

Beweis: Die Kopunktalität von $A\overline{A}$, $B\overline{B}$ und $C\overline{C}$ ist damit gleichbedeutend, daß der Schnittpunkt von $A\overline{A}$ und $B\overline{B}$ (der sich nach Formel (2) ausrechnen läßt) auf $C\overline{C}$ liegt. Eine leichte Rechnung führt nun zur im Satz angegebenen Beziehung.

In der affinen Ebene ist $(p:q:r)$ mit $p+q+r=0$ kein Punkt. Dies wird im folgenden Parallelitätskriterium ausgenutzt:

Die Geraden $[U_1 : V_1 : W_1]$ und $[U_2 : V_2 : W_2]$ sind genau dann parallel zueinander, wenn $V_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot V_2 + W_1 \cdot U_2 - U_1 \cdot W_2 + U_1 \cdot V_2 - V_1 \cdot U_2 = 0$ ist (vgl. Formel (2)).

Es läßt sich leicht verifizieren, daß

(3) $\left[q \cdot (U-V) - r \cdot (W-U) \;:\; r \cdot (V-W) - p \cdot (U-V) \;:\; p \cdot (W-U) - q \cdot (V-W)\right]$
die Parallele zu $[U:V:W]$ durch $(p:q:r)$ ist.

Besondere Punkte des Dreiecks

Auch im folgenden wird Bezug genommen auf Abb. 1.

1) Seitenhalbierendenschnittpunkt S:
Nach Voraussetzung ist $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.
Nach dem Satz von Ceva existiert also S, und es ist $S = (1:1:1)$.

2) (Innen–)Winkelhalbierendenschnittpunkt W:
Der Sinussatz in den Dreiecken $A\overline{C}C$ und $\overline{C}BC$ ergibt $c_1 : c_2 = b : a$. Auf analoge Weise bekommt man die anderen Streckenverhältnisse heraus, und man sieht, daß $W = (a:b:c)$ ist.

3) Höhenschnittpunkt H:
Wegen $\overline{C\overline{C}} = c_1 \cdot \tan\alpha = c_2 \cdot \tan\beta$ und analoger Beziehungen gilt $H = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$.

4) Mittelsenkrechtenschnittpunkt M:
Die Mittelsenkrechten sind zu den Höhen parallel und gehen durch die Seitenmitten. Ihre Gleichungen lassen sich nach der Formel (3) bestimmen. Ähnliche Überlegungen wie beim Satz von Ceva führen dazu, daß M existiert und daß $M = (\tan\beta + \tan\gamma \;:\; \tan\gamma + \tan\alpha \;:\; \tan\alpha + \tan\beta) = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$ ist. Bei der letzten Gleichung wurden die Additionstheoreme der Trigonometrie benutzt.

5) Weitere Punkte:
Aus der Fülle weiterer Punkte seien nur die folgenden ohne Begründung mitgeteilt:

– Ankreismittelpunkte: $W_a = (-a : b : c)$; $W_b = (a : -b : c)$; $W_c = (a : b : -c)$

– Halbierendenschnittpunkt (sh. [2]): $T = (b+c \ : \ c+a \ : \ a+b)$

– Nagelpunkt (sh. [2]): $N = (b+c-a \ : \ c+a-b \ : \ a+b-c)$

– Gergonnepunkt (sh. [3]): $G = \left(\frac{1}{b+c-a} : \frac{1}{c+a-b} : \frac{1}{a+b-c} \right)$

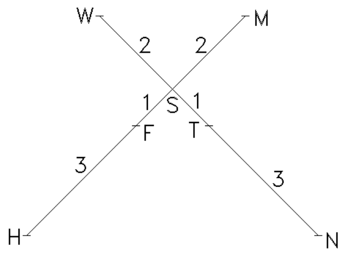
– Feuerbachpunkt: $F = (\sin 2\beta + \sin 2\gamma \ : \ \sin 2\gamma + \sin 2\alpha \ : \ \sin 2\alpha + \sin 2\beta)$

Aus dem Bisherigen ergibt sich, daß M, S, F, H und W, S, T, N jeweils kollinear sind. Sie liegen auf den Eulergeraden

$$HS = [\tan\beta - \tan\gamma \ : \ \tan\gamma - \tan\alpha \ : \ \tan\alpha - \tan\beta]$$

$$WS = [b-c \ : \ c-a \ : \ a-b]$$

Ferner lassen sich die Beziehungen $3 \cdot S = 2 \cdot W + N = 2 \cdot T + W = 2 \cdot M + H = 2 \cdot F + M$ leicht nachprüfen; man hat also folgende Punktekonfiguration (Zahlen an verschiedenen Geraden haben nichts miteinander zu tun; z.B. ist nicht $\overline{WS} = \overline{SM}$ i.a.)



(Abb. 2)

Literatur:

[1] Coxeter: Introduction to geometry. New York usw. ²1969

[2] Baptist: Nagelpunkte und Eulersche Geraden. DdM 2/1982

[3] Coxeter/Greitzer: Zeitlose Geometrie. Stuttgart 1983