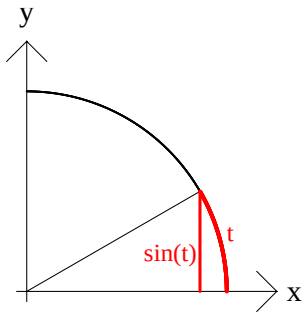
Wozu braucht man das Bogenmaß?

Bei der Ableitung der Sinusfunktion tritt $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$ auf; dieser Wert ist 1, wenn das Argument t der Sinusfunktion im Bogenmaß gemessen wird.

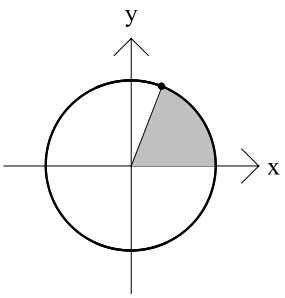


Nur unter dieser Voraussetzung bekommt man die schöne Beziehung

$$\sin'(t)=\cos(t).$$

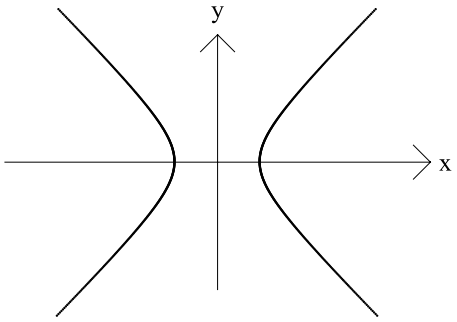
Die Bevorzugung des Bogenmaßes hat also den gleichen Grund wie die Bevorzugung der Euler'schen Zahl e bei Exponentialfunktionen: Beim Ableiten werden die Formeln einfacher.

Statt des Bogenmaßes könnte man auch auf die Idee kommen, den Winkel durch die zugehörige Fläche ausdrücken zu wollen. Bezeichnet man beim Einheitskreis den Mittelpunktswinkel mit t (im Bogenmaß), so hat die getönte Fläche den Inhalt $\pi\cdot\frac{t}{2\cdot\pi}=\frac{t}{2}$.



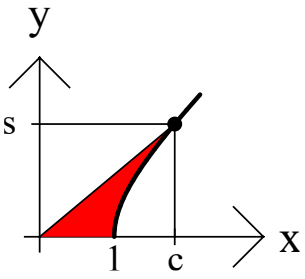
Das Flächenmaß liefert also im Gegensatz zum Bogenmaß nicht eine so schöne Ableitungsformel.

Das ist anders bei anderen Kurven:
Nahe verwandt zum Einheitskreis mit der Gleichung $x^2+y^2=1$ und dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ ist die Einheitshyperbel mit der Gleichung $x^2-y^2=1$ und dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix}$ mit den Nullstellen ± 1 und mit $\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ und $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$.



Es erhebt sich die Frage, was das Argument t anschaulich bedeutet.

Wir fangen andersherum an, betrachten den Punkt $\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix}$ auf der Hyperbel und fragen nach dem in der Skizze rot markierten Flächeninhalt.



Dieser Flächeninhalt ist gegeben durch $A=\frac{c\cdot s}{2}-U$ mit $U=\int_1^{\cosh t}\sqrt{x^2-1}\cdot dx$.

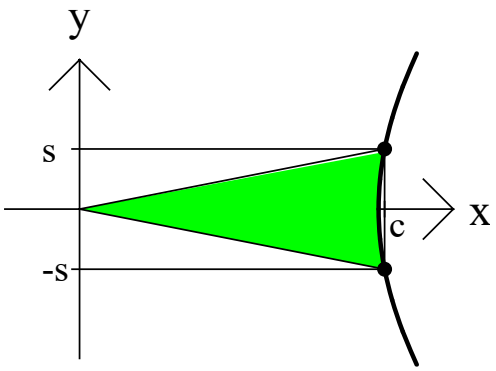
Substituiert man $x=\cosh z$ mit $dx=\sinh z\cdot dz$ und integriert anschließend partiell, bekommt man

$$U=\int_0^t \sinh z\cdot\sinh z\cdot dz=\sinh z\cdot\cosh z\Big|_0^t-\int_0^t \cosh^2 z\cdot dz=\sinh t\cdot\cosh t-\int_0^t \left(1+\sinh^2 z\right)\cdot dz=s\cdot c-t-U$$

und daher $U=\frac{s\cdot c}{2}-\frac{t}{2}$. Damit ist $A=\frac{c\cdot s}{2}-U=\frac{t}{2}$ der Inhalt der rot getönten Fläche.

Analog zum Sinus ist $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t}=1$, wie an der Skizze anschaulich zu vermuten ist, denn die grün getönte Fläche hat für kleine Werte von t den Inhalt $t\approx c\cdot s\approx 1\cdot s=s$.

Mit $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=t+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\ldots$ gelingt auch ein Beweis.



Dass man bei der Hyperbel nach dem Flächeninhalt und nicht nach der Bogenlänge fragt, ist kein Zufall: Das Bogenlängenintegral ist nämlich nicht elementar auswertbar. Es gilt der

Satz von Čebyšev[1]: Das Bogenlängenintegral zu $y=x^k$ ist genau dann elementar auswertbar, wenn $k=1$ (das ist der triviale Fall) oder wenn $k=1+\frac{1}{n}$ mit $n\in\mathbb{N}$ ist.

Demnach ist die Bogenlänge zu $y=\frac{1}{x}$ nicht elementar zu bestimmen und damit auch nicht die Bogenlänge der oben gegebenen Hyperbel, die aus der zu $y=\frac{1}{x}$ durch Drehung und Streckung hervorgeht.

Eine weitere Bedeutung des Bogenmaßes besteht in der Übertragbarkeit auf Raumwinkel: So, wie man das Maß eines ebenen Winkels bestimmen kann durch die Länge des zugehörigen Bogens des Einheitskreises, so kann man das Maß eines Raumwinkels dadurch bestimmen, dass man um den Scheitelpunkt eine Einheitskugel legt. Die Schenkel schneiden aus der Kugel ein sphärisches Dreieck aus, dessen Flächeninhalt das Maß des Raumwinkels ist.

[1] Lesbar aufgeschrieben in: Marchisotto / Zakeri: An invitation to integration in finite terms. College Mathematics Journal vol. 25, no. 4 (September 1994); S. 295 – 308; speziell S. 305.