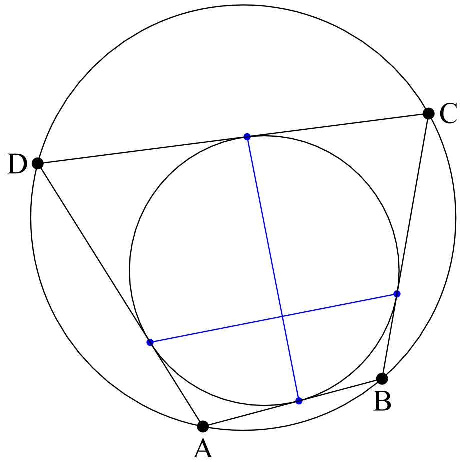
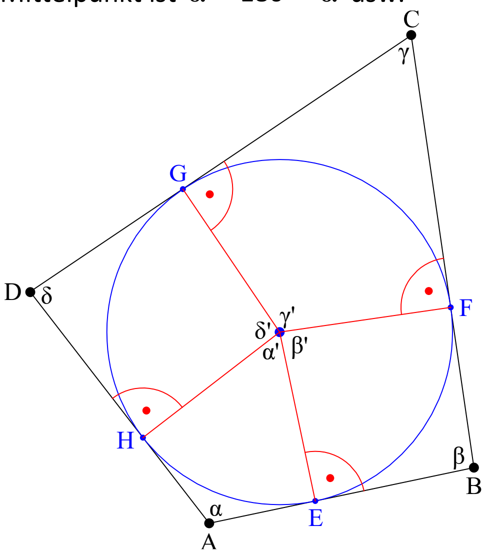
Dr. Jörg MEYER, Hameln
19.10.2020

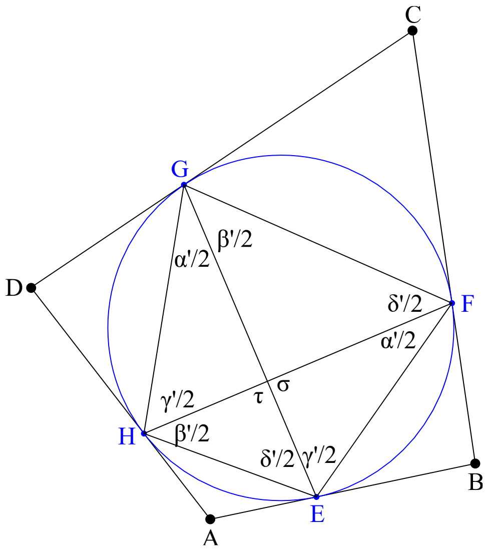
Bizentrische Vierecke

Ein Viereck heißt *bizentrisch*, wenn es einen Umkreis hat (also eine Sehnenviereck ist) und einen Inkreis hat (also ein Tangentenviereck ist). Man gebe sich die vier Seiten, die die Summenbedingung für Tangentenvierecke erfüllen, vor und beginne bei AB. Die Länge der Diagonale AC eines Sehnenvierecks ist berechenbar. Dann konstruiere man C (Kongruenzsatz SSS) und D (SSS).
Es fällt auf, dass die Verbindungssehnen der Inkreisberührpunkte (blau) orthogonal zueinander zu sein scheinen.



Das ist tatsächlich so, wie man anhand der folgenden Doppelfigur einsieht. Links sieht man den blauen Inkreis, und in E, F, G, H werden Tangenten eingetragen, die sich in A, B, C, D schneiden. Beim Inkreis-Mittelpunkt ist $\alpha' = 180° - \alpha$ usw.





Rechts hat man am Diagonalen-Schnittpunkt die Winkel

$\sigma = 180° - \frac{\alpha'}{2} - \frac{\gamma'}{2} = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ und analog $\tau = \frac{\beta + \delta}{2}$. Genau dann ist $\sigma = \tau \left(= 90°\right)$, wenn $\alpha + \gamma = \beta + \delta \left(= 180°\right)$ ist, wenn A, B, C, D auf einem Kreis liegen, wenn also ABCD ein Sehnenviereck ist.
Demnach werden bizentrische Vierecke durch das Senkrechtstehen der Diagonalen charakterisiert.

Dies liefert auch eine andere Konstruktionsmöglichkeit von bizentrischen Vierecken: Man beginne mit dem Inkreis, wähle zwei zueinander orthogonale Sehnen und errichte in deren Endpunkten die Tangenten, deren Schnittpunkte ein bizentrisches Viereck ergeben.