Bahnkurven in Klasse 9[1]

Die Inhalte des Mathematikunterrichts müssen bunter werden! Dazu gehört auch, daß möglichst viele sinnstiftende Beziehungen zwischen den einzelnen „Schubladen“ des herkömmlichen Stoffes hergestellt werden, daß also Querverbindungen zwischen Geometrie/Algebra/Funktionenlehre zu verdeutlichen sind. Nun lassen sich mit Hilfe von dynamischer Geometrie–Software oder eines Funktionsplotters bequem naheliegende und motivierende Konstellationen erzeugen, zu deren Interpretation und zu deren Exploration man aus anderen Zusammenhängen bekannte Sätze benötigt. Damit läßt sich das (leider immer kleiner werdende) Arsenal geometrischer Kenntnisse auf neuartige, aber gleichwohl einfache Sachverhalte anwenden. Dies trägt dazu bei, Einzelkenntnisse besser zu verankern und zu vernetzen, ja mitunter sogar, sie überhaupt erstmals sinnvoll zu benutzen.

1. Parabeln als Bahnkurven

Die hier gesammelten Beispiele sind so angelegt, daß sie sowohl mit einem interaktiven Geometrie–Programm als auch mit einem graphikfähigen Taschenrechner behandelt werden können. Der erste Weg ist sicherlich motivierender, liefert aber keine mathematische Durchdringung. Diese ist Voraussetzung, um den zweiten Weg beschreiten zu können. In beiden Fällen gebe man das Koordinatensystem nicht vor, sondern lasse die Schülerinnen und Schüler selbst ein geeignetes finden.

Dem Unterricht vorausgegangen seien: Steigungen orthogonaler Geraden, Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen, der Satz des Pythagoras und der Höhensatz sowie Parabeln als Ortskurven (etwa in dieser Reihenfolge).

1. a. Schon bei der Behandlung der Parabeln als Ortskurven (Parabel als Menge aller Punkte P, die zu einem Punkt F und zu einer Gerade g denselben Abstand haben)

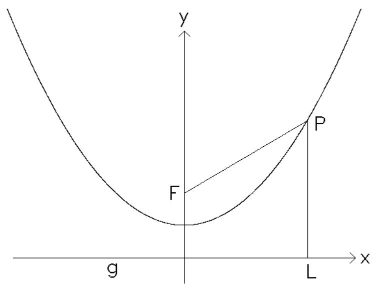

Fig. 1

erweist es sich als notwendig, geometrische Probleme algebraisch zu beschreiben:
Es sei $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Mittelsenkrechte zu FL hat die Gleichung $y = t \cdot \left(x - \frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2}$; also ist $P = \begin{pmatrix} t \\ (t^2 + 1)/2 \end{pmatrix}$.

(Man bekommt das handlichere Ergebnis $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, falls man $F = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g:\ y = -\frac{1}{4}$ ansetzt.)

<u>Anschlußproblem</u>: Welchen Einfluß hat der Abstand zwischen F und g auf die Gestalt der Parabel?

Die Algebra besteht hier im wesentlichen im Aufstellen einer Geradengleichung und im Berechnen eines Schnittpunkts. Dies wird ohnehin unterrichtet; warum soll man da nicht die dürren Aufgabenplantagen hierzu durch Probleme mit einem wesentlich reicheren Kontext ersetzen?

---

[1] Erschien in: Mathematik in der Schule **35** (12), S. 691 - 698 (1997).

Die Parabel kommt auch in anderen Kontexten vor:

<u>Variationen zum Thaleskreis</u>

1. b. Eine kleine Ergänzung der Thales−Figur führt zu einer <u>Parabel</u> (bei der Brennpunkt und Leitgerade keine anschauliche Bedeutung zu haben scheinen):

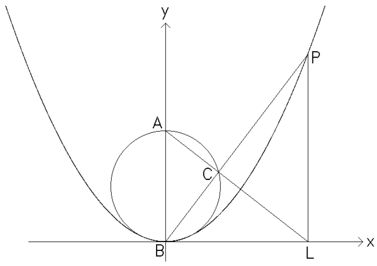

Fig. 2

Daß es sich tatsächlich um eine Parabel handelt, läßt sich mit den Methoden der Klasse 9 nachprüfen (dabei handelt es sich um einen willkommenen Transfer der Vorgehensweise bei der Ortskurvenproblematik):

Es sei $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann hat AL die Steigung $-\frac{1}{t}$, also hat BP die Gleichung $y = t \cdot x$, woraus sich $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ ergibt.

Nebenbei: Der Kreis ist der zum Scheitelpunkt gehörige Krümmungskreis der Parabel.

<u>Anschlußproblem</u>: Wie wirkt sich die Größe des Kreises auf die Gestalt der Parabel aus?

1. c. Variiert man die Vorgehensweise von 1.b zu unbedacht, so kann Neues entstehen, das weit über die Methoden der Klasse 9 hinausgeht:

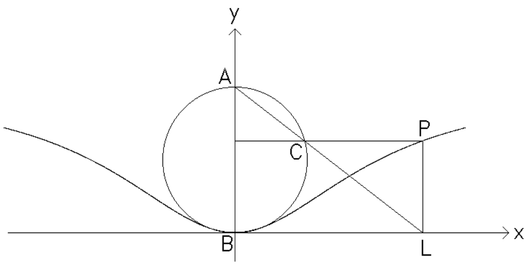

Fig. 3

Wieder sei $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $C = \frac{t}{t^2+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, also $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2/(t^2+1) \end{pmatrix}$.

Es handelt sich um eine kubische Kurve, die <u>Versiera</u>.

1. d. Für den Transfer wird die Vorgehensweise von 1.b so variiert, daß wieder eine Parabel entsteht:

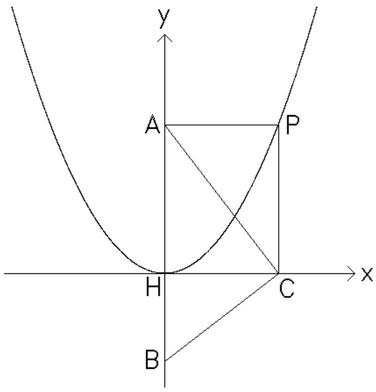

Fig. 4

Hier wird B festgehalten, und bei C sei ein rechter Winkel. Die Parabelgleichung ist der <u>Höhensatz</u>: $HC^2 = AH \cdot HB$.

<u>Anschlußproblem</u>: Wie läßt sich die Gestalt der Parabel beeinflussen?

1. e. Für eine Klassenarbeit kann abermals variiert werden:

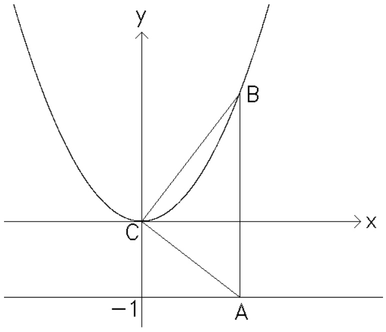

Fig. 5

Der Scheitel C des rechten Winkels wird festgehalten, und A bewegt sich auf einer Parallelen zur x−Achse. AB sei zur x−Achse orthogonal. Wiederum ist der <u>Höhensatz</u> die Parabelgleichung.

1. f. Iteriert man die Konstruktion von 1. e,

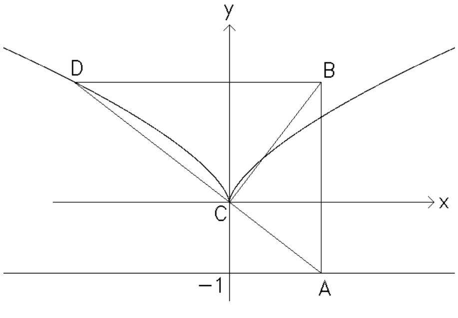

Fig. 6

so gelangt man zur <u>Neilschen Parabel</u>, die in Klasse 9 natürlich nicht weiter untersucht wird.

Mit $A = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$ folgt $B = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$. Wendet man den Höhensatz nun auf das Dreieck CBD an, ergibt sich $D = \begin{pmatrix} -x^3 \\ x^2 \end{pmatrix}$.

1. g. Variiert man die Konstruktion von 1.e, so gelangt man ebenfalls zu Kurven, deren Durchdringung in der Sekundarstufe I noch nicht möglich ist. Aber warum sollten sie nicht schon von Schülern vorher konstruiert werden dürfen?

Bei der Parabel war BA zur Parabelachse parallel. D.h.: BA geht durch den unendlich fernen Punkt, der zur Parabelachse gehört. Statt des unendlich fernen Punktes nehmen wir nun einen im Endlichen liegenden.
Dieser Punkt D kann oberhalb oder unterhalb der x–Achse liegen; je nach Lage ergibt sich eine <u>Ellipse</u> (Fig. 7) oder eine <u>Hyperbel</u> (Fig. 8).

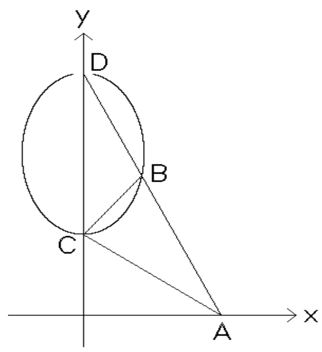

Fig. 7

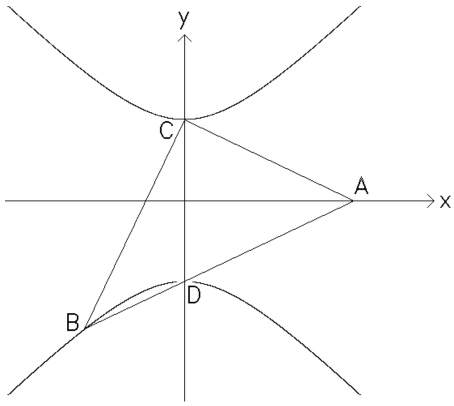

Fig. 8

Es sei $A = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$. CB hat die Gleichung $y = \frac{t}{c} \cdot x + c$, und AD hat die Gleichung $y = -\frac{d}{t} \cdot x + d$. Der Schnittpunkt ist $B = \frac{1}{c \cdot d + t^2} \cdot \begin{pmatrix} c \cdot t \cdot (d - c) \\ d \cdot (c^2 + t^2) \end{pmatrix}$.

Die Höhenschnittpunktsparabel

1. h. Bekanntlich schneiden sich die 3 Höhen eines Dreiecks ABC in einem Punkt H. Was passiert mit H, wenn sich C auf einer Parallelen zu AB bewegt?

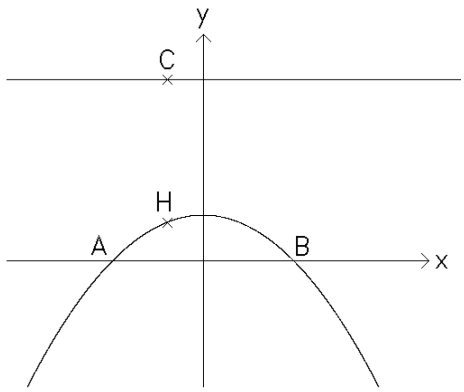

Fig. 9

Die Bahnkurve von H sieht aus wie eine Parabel, und daß es tatsächlich eine ist, kann wieder mit den Methoden der Klasse 9 nachgerechnet werden:

Dazu sei das Koordinatensystem so gewählt, daß $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist; der Punkt C habe die Koordinaten $C = \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix}$ mit festem k. Dann hat die Höhe durch B die Gleichung $y = -\frac{t+1}{k} \cdot (x-1)$, und die Höhe durch C hat die Gleichung $x = t$. Der Schnittpunkt beider Höhen ist mithin $H = \begin{pmatrix} t \\ (1-t^2)/k \end{pmatrix}$.

Es handelt sich also tatsächlich um eine Parabel.

Achtung: Bewegt sich C auf einer Geraden, die nicht zu AB parallel ist, bekommt man keine Parabel (obwohl es so scheinen mag).

Anschlußproblem: Kann C innerhalb der Parabel liegen?

2. Kreise

Auch die übliche Pythagoras–Figur liefert Anlaß zu Variationen:

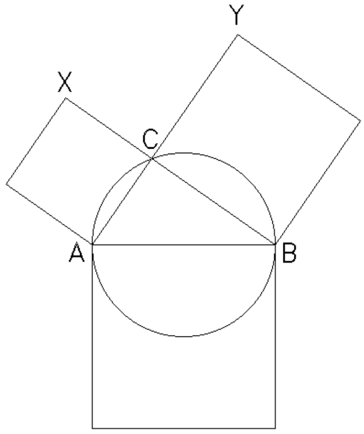

Fig. 10

Was passiert mit X und Y, wenn C wandert?

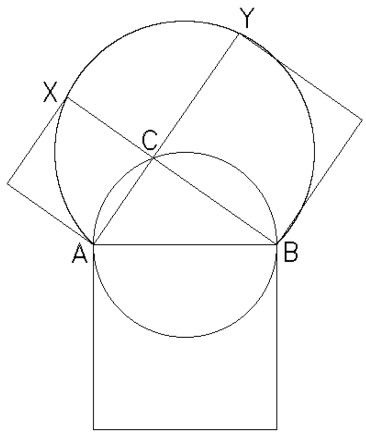

Fig. 11

Ist das ein Kreis? Wenn ja, was für einer?

Und die anderen Ecken?

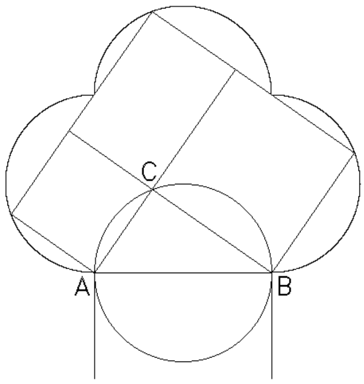

Fig. 12

Sie bewegen sich offensichtlich auf Halbkreisen, die zum Thaleskreis kongruent sind. Warum ist das so?

3. Hyperbeln

3. a. Wie konstruiert man mit interaktiver Geometrie−Software eine Hyperbel ? Deren Gleichung $y = \frac{1}{x}$ bzw. $x \cdot y = 1$ legt die Verwendung des Höhensatzes nahe:

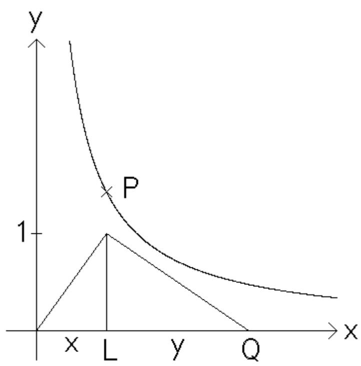

Fig. 13

Man muß nur LQ um L um 90° drehen.

3. b. Auch der Kathetensatz führt zum Ziel:

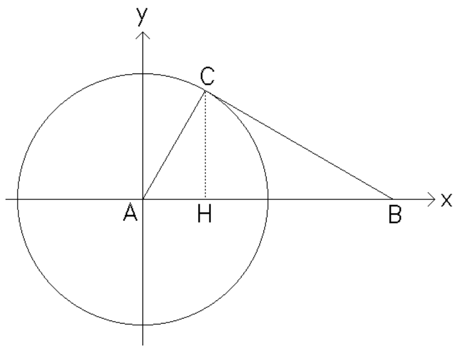

Fig. 14

Beim Einheitskreis ist $AH \cdot AB = 1$; um eine Hyperbel zu erhalten, muß man AH in B senkrecht zur x–Achse antragen.

3. c. Es geht aber auch anders: Schon in 1. b haben wir gesehen, daß die Gerade AL (Fig. 2) die Gleichung $y = -\frac{x}{t} + 1$ hat. Dies verwenden wir zu folgender Konstruktion, die den Thaleskreis gar nicht mehr benötigt:

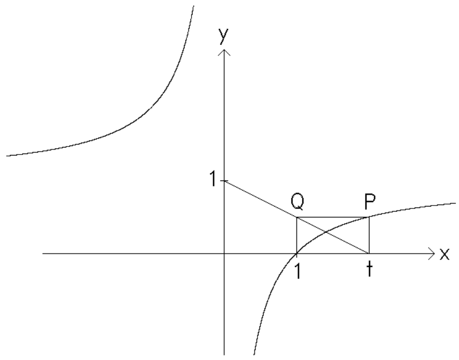

Fig. 15

In Rede steht die Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$. Auf ihr liegt der zu $x = 1$ gehörige Punkt $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 1/t \end{pmatrix}$.

Verschiebt man ihn parallel zur x–Achse bis hin zur Stelle $x = t$, so bekommt man den Hyperbelpunkt $P = \begin{pmatrix} t \\ 1 - 1/t \end{pmatrix}$.

3. d. Variiert man 3. c, so erhält man eine Ergänzung des Satzes von Thales:

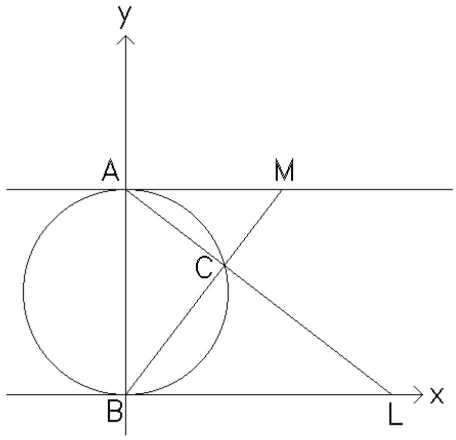

Fig. 16

Mit $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $AL:\ y = -\frac{x}{t} + 1$ und $BC:\ y = t \cdot x$ folgt $M = \begin{pmatrix} 1/t \\ 0 \end{pmatrix}$. Daher gilt: $BL \cdot AM = 1$.

Dies führt zu einer Hyperbelkonstruktion, falls man AM in L senkrecht zu BL abträgt.