Jörg MEYER, Hameln 14.4.2025

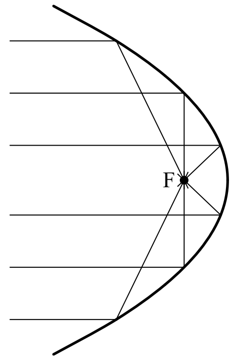
Asphärische Linsen

Nach einer Einleitung werden sphäro-elliptische Linsen und plan-hyperbolische Linsen als 2 Typen asphärischer konvexer Sammellinsen vorgestellt.

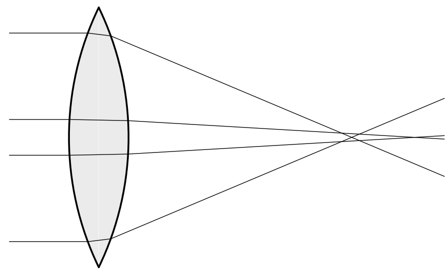
Einleitung

Bekanntlich werden alle achsenparallele Strahlen an einer **Parabel**-Innenwand so reflektiert, dass sie anschließend durch den Brennpunkt F gehen.

Man fragt sich, ob man diesen Effekt auch durch eine Linse erreichen kann.

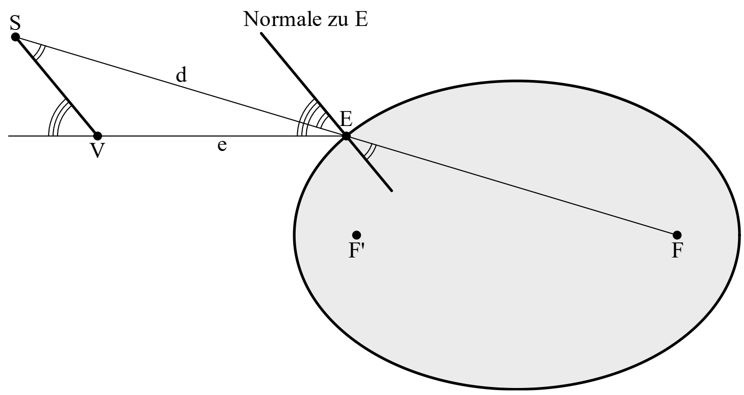


Die gewöhnliche bisphärische Sammellinse erfüllt diese Eigenschaft nur für achsennahe Strahlen, wie man schon im Physik-Unterricht gelernt hat.



Sphäro-elliptische Linsen

Eine **Ellipse** mit der Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ hat den allgemeinen Punkt $E=E(t)=\begin{pmatrix} a\cdot\cos t \\ b\cdot\sin t \end{pmatrix}$. Die Normale in E den allgemeinen Punkt $X=E+\lambda\cdot\begin{pmatrix} b\cdot\cos t \\ a\cdot\sin t \end{pmatrix}$.



Einer der Brennpunkte ist $F=\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f^2=a^2-b^2$. Spiegelt man F an E, bekommt man $S=2\cdot E-F$. Es ist $d=|SE|=|EF|=\sqrt{\left(f^2+b^2\right)\cdot\cos^2 t-2\cdot a\cdot\cos t\cdot f+a^2-b^2+b^2\cdot\sin^2 t}=a-f\cdot\cos t$.

Nun betrachte man die durch S verlaufende Parallele zur Normale zu E mit dem allgemeinen Punkt $X=S+\sigma\cdot\begin{pmatrix} b\cdot\cos t \\ a\cdot\sin t \end{pmatrix}$. Für $\sigma=-\frac{b}{a}$ bekommt man $V=2\cdot E-F-\frac{b}{a}\cdot\begin{pmatrix} b\cdot\cos t \\ a\cdot\sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2\cdot a^2-b^2}{a}\cdot\cos t-f \\ b\cdot\sin t \end{pmatrix}$ und

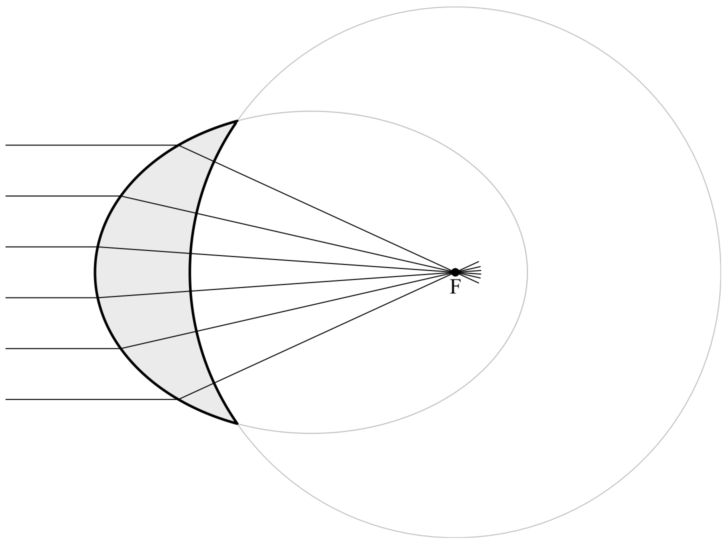
damit $e=|EV|=\left|\begin{pmatrix} \frac{2\cdot a^2-b^2}{a}\cdot\cos t-f-a\cdot\cos t \\ b\cdot\sin t-b\cdot\sin t \end{pmatrix}\right|=\left|\frac{f^2}{a}\cdot\cos t-f\right|=\frac{f}{a}\cdot d$.

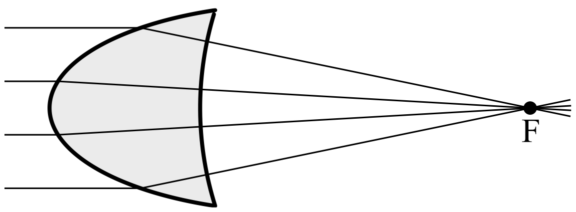
Ist in der Skizze der zweigestrichene Winkel der Einfallswinkel α und der dreigestrichene Winkel der Brechungswinkel β, so gilt im Dreieck VES nach dem Sinussatz $\frac{\sin\alpha}{e}=\frac{\sin\beta}{d}$, also $\sin\beta=\frac{a}{f}\cdot\sin\alpha$, also das Brechungsgesetz, wenn $\frac{a}{f}(>1)$ der Brechungsindex des Linsenmaterials ist.

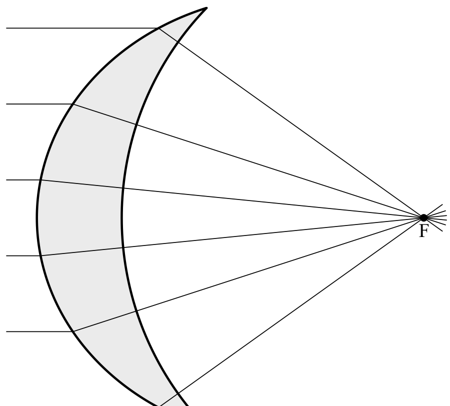
Die gebrochenen Strahlen sind demnach alle achsenparallel.

Da der Lichtweg umkehrbar ist, kann man sagen: Fallen achsenparallele Strahlen auf die Ellipse, werden sie so gebrochen, dass sie nach der Brechung durch den Brennpunkt F gehen.

Begrenzt man die Linse rechts durch eine Kugel um F, , so werden die Strahlen beim Austritt aus der Linse gar nicht gebrochen, und man hat den gewünschten Effekt, und zwar nicht nur für achsennahe Strahlen. In der Graphik rechts beträgt der Brechungsindex 1,5 und in den beiden Graphiken unten 1,1 und 2:







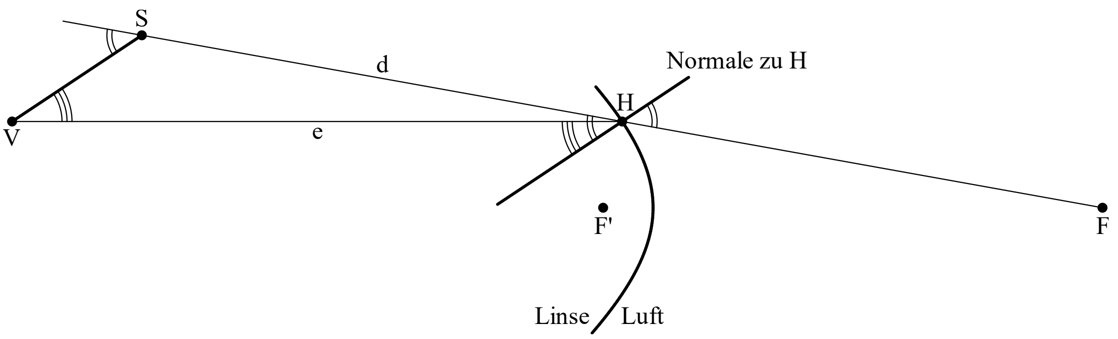
Die einzig echte Brechung geschieht beim Eintritt in die Linse.

Plan-hyperbolische Linsen

Man bekommt den Effekt, dass parallele Strahlen nach der Brechung konvergieren, auch mit einer **Hyperbel** hin:

Eine solche hat die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ und den allgemeinen Punkt $H=H(t)=\frac{1}{\cos t}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b\cdot\sin t \end{pmatrix}$.

Die Normale in t hat den allgemeinen Punkt $X=H+\lambda\cdot\begin{pmatrix} -b \\ a\cdot\sin t \end{pmatrix}$.



Einer der Brennpunkte ist $F=\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $f^2=a^2+b^2$. Spiegelt man F an H, bekommt man $S=2\cdot H-F$.

Es ist $d=|SH|=|HF|=\frac{1}{\cos t}\cdot\sqrt{a^2-2\cdot a\cdot f\cdot\cos t+\left(a^2+b^2\right)\cdot\cos^2 t+b^2\cdot\sin^2 t}=\frac{f-a\cdot\cos t}{\cos t}$.

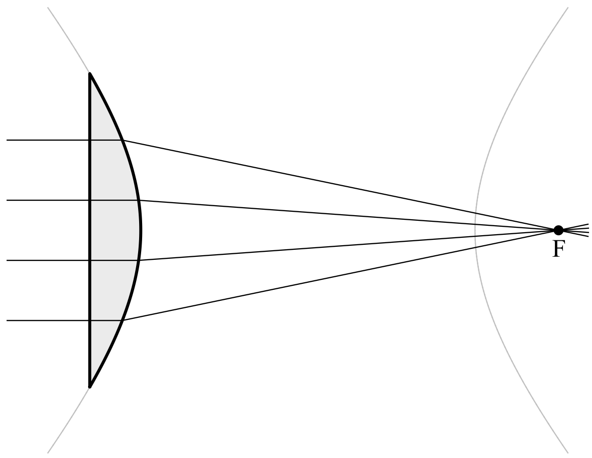
Die durch S verlaufende Parallele zur Normalen zu H hat den allgemeinen Punkt $X=S+\rho\cdot\begin{pmatrix} -b \\ a\cdot\sin t \end{pmatrix}$;

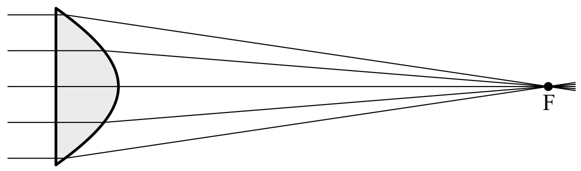
für $\rho=-\frac{b}{a\cdot\cos t}$ bekommt man $V=2\cdot H-F-\frac{b}{a\cdot\cos t}\cdot\begin{pmatrix} -b \\ a\cdot\sin t \end{pmatrix}$ und damit $V-H=\frac{f}{a\cdot\cos t}\cdot\begin{pmatrix} f-a\cdot\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

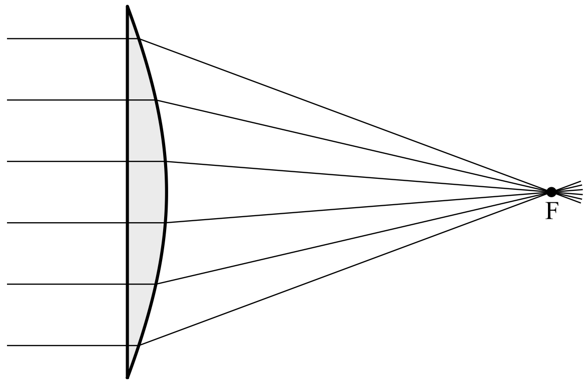
Somit ist $e=|VH|=\frac{f}{a}\cdot\frac{f-a\cdot\cos t}{\cos t}=\frac{f}{a}\cdot d$.

Ist wieder der zweigestrichene Winkel der Einfallswinkel α und der zweigestrichene Winkel der Brechungswinkel β, so gilt wegen des Sinussatzes im Dreieck VHS, dass $\frac{\sin\alpha}{e}=\frac{\sin\beta}{d}$ und damit $\sin\alpha=\frac{f}{a}\cdot\sin\beta$ gilt, also wieder das Brechungsgesetz, wenn der Linsenkörper den Brechungsindex $\frac{f}{a}(>1)$ hat. Die gebrochenen Strahlen sind demnach alle achsenparallel.

Begrenzt man die Linse links durch eine Ebene, so werden die Strahlen beim Linseneintritt gar nicht gebrochen.
Da der Lichtweg umkehrbar ist, versammeln sich alle achsenparallelen Strahlen nach dem Linsenaustritt in F.
In der Graphik rechts beträgt der Brechungsindex 1,5 und in den beiden Graphiken unten 1,1 und 2:







Die einzig echte Brechung geschieht beim Austritt aus der Linse.