Jörg Meyer, Hameln

Mehrfache Achsenspiegelungen (rechnerisch)

1. Spiegelung an einer Achse

Wir spiegeln den Punkt $P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ an der Geraden g mit $X\cdot N=e$; der Bildpunkt sei Q.

Die Gerade habe den Richtungsvektor $R=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$; dann ist $N=\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}$.

Wir gehen *rückwärts* vor und nehmen an, wir hätten schon Q. Dann ist die Spiegelachse von P und Q gegeben durch $X\cdot(P-Q)=\frac{P+Q}{2}\cdot(P-Q)=\frac{P^2-Q^2}{2}$. Damit ist $\sigma\cdot N=P-Q$ und $\sigma\cdot e=\frac{P^2-Q^2}{2}$, also $Q=P-\sigma\cdot N$ und $\sigma\cdot e=\frac{P^2-(P-\sigma\cdot N)^2}{2}=\frac{2\cdot\sigma\cdot P\cdot N-\sigma^2}{2}$, woraus sich $\sigma=2\cdot P\cdot N-2\cdot e$ und damit

$$\begin{aligned}Q&=P-2\cdot(P\cdot N-e)\cdot N\\&=2\cdot e\cdot N+P-2\cdot(P\cdot N)\cdot N\\&=2\cdot e\cdot N+\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}-2\cdot(u\cdot\sin t-v\cdot\cos t)\cdot\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}\\&=2\cdot e\cdot N+\begin{pmatrix}u-2\cdot(u\cdot\sin t-v\cdot\cos t)\cdot\sin t\\v+2\cdot(u\cdot\sin t-v\cdot\cos t)\cdot\cos t\end{pmatrix}\\&=2\cdot e\cdot N+\begin{pmatrix}u-2\cdot u\cdot\sin^2 t+2\cdot v\cdot\sin t\cdot\cos t\\v+2\cdot u\cdot\sin t\cdot\cos t-2\cdot v\cdot\cos^2 t\end{pmatrix}\\&=2\cdot e\cdot N+\begin{pmatrix}u\cdot\cos(2\cdot t)+v\cdot\sin(2\cdot t)\\u\cdot\sin(2\cdot t)-v\cdot\cos(2\cdot t)\end{pmatrix}\\&=2\cdot e\cdot N+\begin{pmatrix}\cos(2\cdot t)&\sin(2\cdot t)\\\sin(2\cdot t)&-\cos(2\cdot t)\end{pmatrix}\cdot P\end{aligned}$$

ergibt. Schreibt man $\overline{P}=\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}$ und $\overline{N}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\1\end{pmatrix}$ usw., so lässt sich auch die Translation in der Matrix darstellen, und es ist

$$\boxed{\overline{Q}=\begin{pmatrix}\cos(2\cdot t)&\sin(2\cdot t)&2\cdot e\cdot\sin t\\\sin(2\cdot t)&-\cos(2\cdot t)&-2\cdot e\cdot\cos t\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}}.$$

2. Doppelspiegelungen

Wendet man auf $P=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ eine Doppelspiegelung an zwei zueinander *parallelen* Achsen an, so ist (mit o.B.d.A. zur Rechtsachse parallelen Richtungen, also $t=0°$) das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2\cdot f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2\cdot e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cdot(e-f) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v+2\cdot(e-f) \\ 1 \end{pmatrix},$$

mithin hat man eine *Translation* um $2\cdot(e-f)$ in Richtung der Hochachse.

Wendet man auf $P=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ eine Doppelspiegelung an zwei durch den *Ursprung* verlaufenden Achsen an, so ist (mit o.B.d.A. $t=0°$) das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} \cos(2\cdot s) & \sin(2\cdot s) & 0 \\ \sin(2\cdot s) & -\cos(2\cdot s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(2\cdot s) & -\sin(2\cdot s) & 0 \\ \sin(2\cdot s) & \cos(2\cdot s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix},$$

mithin hat man eine *Drehung* um $2\cdot s$.

3. Komposition von drei Achsenspiegelungen

Wendet man *drei* Achsenspiegelungen an (erst mit $t=0°$ und $e=0$, dann mit s und f, dann mit r und g), so bekommt man

$$P^*=\begin{pmatrix} \cos(2\cdot r) & \sin(2\cdot r) & 2\cdot g\cdot\sin r \\ \sin(2\cdot r) & -\cos(2\cdot r) & -2\cdot g\cdot\cos r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(2\cdot s) & \sin(2\cdot s) & 2\cdot f\cdot\sin s \\ \sin(2\cdot s) & -\cos(2\cdot s) & -2\cdot f\cdot\cos s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(2\cdot s-2\cdot r) & -\sin(2\cdot s-2\cdot r) & 2\cdot f\cdot\sin(s-2\cdot r)+2\cdot g\cdot\sin r \\ -\sin(2\cdot s-2\cdot r) & -\cos(2\cdot s-2\cdot r) & 2\cdot f\cdot\cos(s-2\cdot r)-2\cdot g\cdot\cos r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Mittelpunkt M von P und P* gilt

$$
\begin{aligned}
M &= \frac{P+P^*}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1+\cos(2\cdot s-2\cdot r) & -\sin(2\cdot s-2\cdot r) & 2\cdot f\cdot\sin(s-2\cdot r)+2\cdot g\cdot\sin r \\ -\sin(2\cdot s-2\cdot r) & 1-\cos(2\cdot s-2\cdot r) & 2\cdot f\cdot\cos(s-2\cdot r)-2\cdot g\cdot\cos r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot\cos^2(s-r) & -\sin(2\cdot s-2\cdot r) & 2\cdot f\cdot\sin(s-2\cdot r)+2\cdot g\cdot\sin r \\ -\sin(2\cdot s-2\cdot r) & 2\cdot\sin^2(s-r) & 2\cdot f\cdot\cos(s-2\cdot r)-2\cdot g\cdot\cos r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2(s-r) & -\sin(s-r)\cdot\cos(s-r) & f\cdot\sin(s-2\cdot r)+g\cdot\sin r \\ -\sin(s-r)\cdot\cos(s-r) & \sin^2(s-r) & f\cdot\cos(s-2\cdot r)-g\cdot\cos r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f\cdot\sin(s-2\cdot r)+g\cdot\sin r \\ f\cdot\cos(s-2\cdot r)-g\cdot\cos r \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} u\cdot\cos^2(s-r)-v\cdot\sin(s-r)\cdot\cos(s-r) \\ -u\cdot\sin(s-r)\cdot\cos(s-r)+v\cdot\sin^2(s-r) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f\cdot\sin(s-2\cdot r)+g\cdot\sin r \\ f\cdot\cos(s-2\cdot r)-g\cdot\cos r \end{pmatrix}+\big(u\cdot\cos(s-r)-v\cdot\sin(s-r)\big)\cdot\begin{pmatrix} \cos(s-r) \\ -\sin(s-r) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Man erkennt: Wird $P=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (zweidimensional) variiert, so verläuft M auf einer Geraden m mit dem (von P unabhängigen) Richtungsvektor $\begin{pmatrix} \cos(s-r) \\ -\sin(s-r) \end{pmatrix}$ und dem (ebenso von P unabhängigen) speziellen Punkt $\begin{pmatrix} f\cdot\sin(s-2\cdot r)+g\cdot\sin r \\ f\cdot\cos(s-2\cdot r)-g\cdot\cos r \end{pmatrix}$.

Sind die drei Achsen alle Ursprungsgeraden (d.h. $f=g=0$), so ist (erwartungsgemäß) auch m eine Ursprungsgerade.

Sind alle drei Achsen zueinander parallel (d.h. $s=r=0°$), so ist der allgemeine Punkt von m gegeben durch $X=\begin{pmatrix} 0 \\ f-g \end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; m ist also (erwartungsgemäß) zu den drei Achsen parallel.

Die Normalenform von m: $X=\begin{pmatrix} f\cdot\sin(s-2\cdot r)+g\cdot\sin r \\ f\cdot\cos(s-2\cdot r)-g\cdot\cos r \end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix} \cos(s-r) \\ -\sin(s-r) \end{pmatrix}$ ist

$$
X\cdot\begin{pmatrix} \sin(s-r) \\ \cos(s-r) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f\cdot\sin(s-2\cdot r)+g\cdot\sin r \\ f\cdot\cos(s-2\cdot r)-g\cdot\cos r \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sin(s-r) \\ \cos(s-r) \end{pmatrix}=f\cdot\cos(r)-g\cdot\cos(s)\,.
$$