Zur Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel[1]

Es ist nicht nur ein wichtiges Unterrichtsziel, Terme aufzustellen und umzuformen, sondern auch, sie zu interpretieren. Dabei sind kreative Deutungen natürlich besonders willkommen, etwa nach dem Motto „Den Sinn nicht in den Dingen suchen, sondern ihn hineinstecken!“ [2]

In dieser kurzen Note soll gezeigt werden, dass - geeignet interpretierte - Tangententerme zur Ungleichung

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad (\mathrm{AGM}_n)$$

von arithmetischem und geometrischem Mittel führen können (die a_i müssen natürlich echt positiv sein). Damit gewinnt man einen sehr kurzen Beweis für (AGM_n).

1 Tangenten an die quadratische Parabel

Die Tangente zur Normalparabel mit $y = x^2$ an der Stelle $x = a$ hat die Gleichung $y = 2 \cdot a \cdot x - a^2$. Die Tangente verläuft immer unterhalb der Parabel; es ist also

$$x^2 \geq 2 \cdot a \cdot x - a^2 . \qquad (\mathrm{T}_2)$$

Schreibt man diese Ungleichung als

$$\frac{x^2 + a^2}{2} \geq a \cdot x , \qquad (\mathrm{AGM}_2)$$

so hat man die Aussage gewonnen, dass das arithmetische Mittel von x^2 und a^2 immer größer oder gleich dem entsprechenden geometrischen Mittel ist.
Das mag als relativ umständliche Begründung für die Mittelungleichung (AGM_2) erscheinen, lässt sich aber fruchtbar machen für die (bei weitem nicht so triviale) Mittelungleichung für drei Glieder.

2 Tangenten an die kubische Parabel

An der Stelle $x = a$ hat die kubische Parabel mit $y = x^3$ die Gerade mit $y = 3 \cdot a^2 \cdot x - 2 \cdot a^3$ als Tangente. Für positive a liegt ferner - wie im quadratischen Fall - die Tangente immer unterhalb des Graphen; für $a > 0$ und $x > 0$ gilt also

$$x^3 \geq 3 \cdot a^2 \cdot x - 2 \cdot a^3 \qquad (\mathrm{T}_3)$$

bzw.

$$\frac{x^3 + 2 \cdot a^3}{3} \geq a^2 \cdot x . \qquad (\mathrm{U}_3)$$

Wie im quadratischen Fall liegt die Deutung nahe: Das arithmetische Mittel aus x^3, a^3 und a^3 ist größer oder gleich dem entsprechenden geometrischen Mittel.
Wie lässt sich daraus die allgemeine Mittelungleichung

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq a \cdot b \cdot c$$

beweisen?
Wir addieren (U_3) für x und a mit (U_3) für x und b und setzen $x = c$; es folgt

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot c .$$

Wegen (AGM_2) erhält man nun die gewünschte Aussage

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot c \geq a \cdot b \cdot c . \qquad (\mathrm{AGM}_3)$$

3 Tangenten an die biquadratische Parabel

Es ist klar, wie es weiter geht: Analog zu (T_3) folgt

$$x^4 \geq 4 \cdot a^3 \cdot x - 3 \cdot a^4 \qquad (\mathrm{T}_4)$$

bzw.

---

[1] Erschien in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **58** (6); S. 341 - 342 (2005).
[2] Nietzsche, Nachlass 1885-1887, München 1999: dtv / de Gruyter, Band 12, S. 238

$$\frac{x^4 + 3 \cdot a^4}{4} \geq a^3 \cdot x \,. \qquad (U_4)$$

Addiert man die Ungleichungen (U_4) für a, b und c und setzt $x = d$, so folgt mit (AGM_3), dass

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{4} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot d \geq a \cdot b \cdot c \cdot d \qquad (AGM_4)$$

gilt.

4 Alternative Begründungen für die Tangenten-Ungleichung

Die Tangenten-Ungleichungen (T_2), (T_3) und (T_4) verallgemeinern sich zu

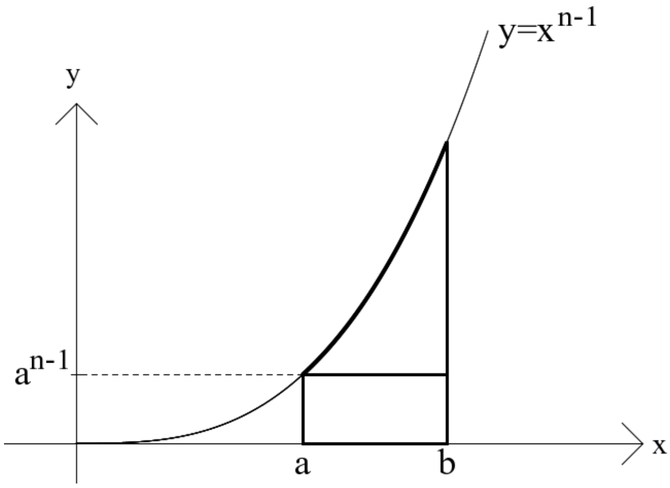
$$x^n \geq n \cdot a^{n-1} \cdot x - (n-1) \cdot a^n \qquad (T_n)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Schreibt man (T_n) für $x = b$ in der Form

$$\frac{b^n - a^n}{n} \geq a^{n-1} \cdot (b - a)\,, \qquad (T_n^*)$$

so hat man eine Aussage über Flächeninhalte; es ist nämlich offensichtlicherweise

$$\int_a^b x^{n-1} \cdot dx \geq a^{n-1} \cdot (b - a)\,.$$



Schreibt man hingegen (T_n^*) in der Form

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} \geq n \cdot a^{n-1}\,, \qquad (T_n^{**})$$

so sieht man den engen Bezug zur geometrischen Reihe: Für $b > a$ folgt nämlich (T_n^{**}) aus der Summenformel

$$\frac{b^n - a^n}{b - a} = \underbrace{b^{n-1} + b^{n-2} \cdot a + b^{n-3} \cdot a^2 + \ldots + b \cdot a^{n-2} + a^{n-1}}_{\text{n Summanden}} \geq n \cdot a^{n-1}\,.$$

Selbstverständlich besteht ein enger Bezug zur für alle ganzen $n \geq 0$ und alle $x > -1$ gültigen Bernoulli-Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$. Setzt man $x = \frac{b}{a} - 1$, bekommt man $b^n \geq a^n + n \cdot \left(b \cdot a^{n-1} - a^n\right)$ und damit (T_n^{**}).