

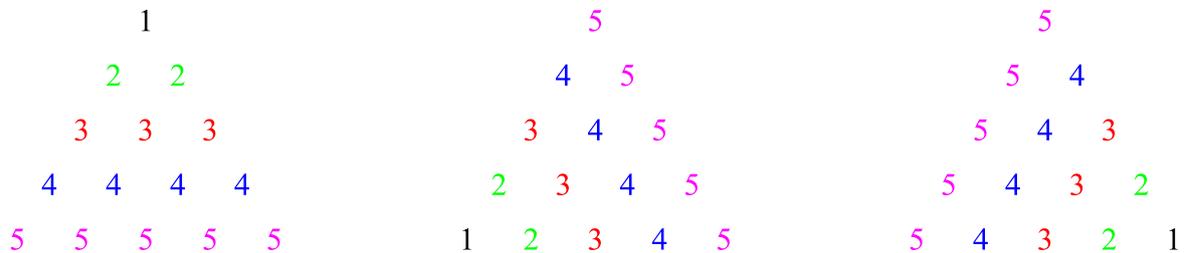
Die Summe der ersten n Quadratzahlen¹

Die Beziehung

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$$

wird exemplarisch begründet.

Das links stehende Dreieck zeigt die ersten 5 Quadratzahlen:



Die beiden folgenden Dreiecke entstehen aus dem links stehenden durch Drehung.

Addiert man alle drei Dreiecke, so ergibt sich stets 11 (allgemeiner: $n + n + 1$).

Da es $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ Einträge gibt, hat man die zu beweisende Beziehung gewonnen.

Man sieht die enge Verwandtschaft dieser Begründung zum „Trick des kleinen Gauß“ bei der Summation von $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Setzt man $S_n = \sum_{i=1}^n i^2$ an als $S_n = A \cdot n^3 + B \cdot n^2 + C \cdot n + D$, so muss $D=0$ sein wegen $S_0 = 0$ sowie

$$(n+1)^2 = S_{n+1} - S_n, \text{ was auf } A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{6} \text{ f\u00fchrt, also auf } S_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

¹ Der Beweis stammt von St. Kung; er wurde zitiert nach Alsina / Nelsen: Charming proofs; 2010: Mathematical Association of America; S. 7. Eine Vorstufe (halbe Quadrate statt Dreiecke) findet sich in J. Meyer: Lichtenberg und Potenzsummen; in: Mathematik lehren 58, S. 60 - 62 (1993).