Die Summe der ersten n Quadratzahlen[1]

Die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$$

wird exemplarisch begründet.
Das links stehende Dreieck zeigt die ersten 5 Quadratzahlen:

1	5	5
2 2	4 5	5 4
3 3 3	3 4 5	5 4 3
4 4 4 4	2 3 4 5	5 4 3 2
5 5 5 5 5	1 2 3 4 5	5 4 3 2 1

Die beiden folgenden Dreiecke entstehen aus dem links stehenden durch Drehung.
Addiert man alle drei Dreiecke, so ergibt sich stets 11 (allgemeiner: $n+n+1$).
Da es $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ Einträge gibt, hat man die zu beweisende Beziehung gewonnen.

Man sieht die enge Verwandtschaft dieser Begründung zum „Trick des kleinen Gauß“ bei der Summation von $1+2+3+...+n$.

Setzt man $S_n=\sum_{i=1}^{n} i^2$ an als $S_n = A\cdot n^3 + B\cdot n^2 + C\cdot n + D$, so muss $D=0$ sein wegen $S_0=0$ sowie $(n+1)^2 = S_{n+1}-S_n$, was auf $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{6}$ führt, also auf $S_n=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$.

[1] Der Beweis stammt von St. Kung; er wurde zitiert nach Alsina / Nelsen: Charming proofs; 2010: Mathematical Association of America; S. 7. Eine Vorstufe (halbe Quadrate statt Dreiecke) findet sich in J. Meyer: Lichtenberg und Potenzsummen; in: Mathematik lehren 58, S. 60 - 62 (1993).