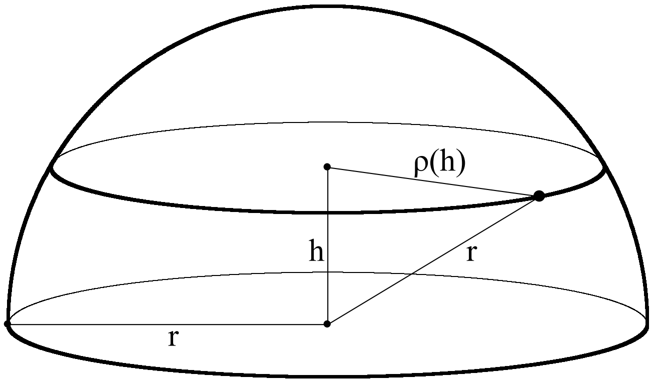
1. Das Volumen V einer Halbkugel: Erster Weg

Will man das Volumen einer Halbkugel berechnen, bietet es sich an, die Halbkugel von innen oder von außen durch Zylinderscheiben zu approximieren.

Dazu benötigt man den zur Höhe h gehörigen Schnittkreisradius $\rho = \rho(h)$, der sich nach Pythagoras zu

$$\rho^2 = r^2 - h^2 \qquad (*)$$

berechnet.



Teilt man die Gesamthöhe in n gleich große Teile, so bekommt man für den Außenzylinder das Volumen

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \pi \cdot \left(\rho\left(i \cdot \frac{r}{n} \right) \right)^2 \cdot \frac{r}{n} \\ &= \pi \cdot \frac{r}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(r^2 - \left(i \cdot \frac{r}{n} \right)^2 \right) \\ &= \pi \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(n \cdot r^2 - \left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) \cdot \left(\frac{r}{n} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Nun braucht man die Summe der ersten $n-1$ Quadratzahlen; es ist

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)}{6}$$

und damit

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \cdot r^3 \cdot \left(1 - \left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^3 \right) \\ &= \pi \cdot r^3 - \pi \cdot r^3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)}{6 \cdot n^3} \\ &= \pi \cdot r^3 - \pi \cdot r^3 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2 \cdot n - 1}{6 \cdot n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi \cdot r^3 - \pi \cdot r^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \end{aligned}$$

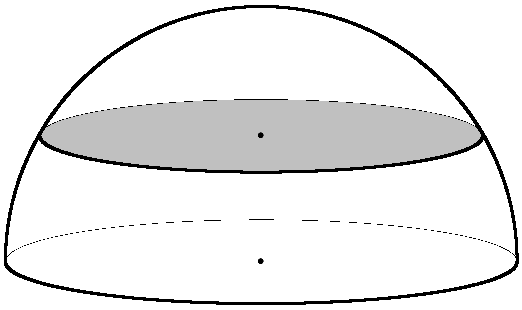
Damit ist ein Beitrag zur *propädeutischen Analysis* geleistet.

2. Das Volumen V einer Halbkugel: Zweiter Weg

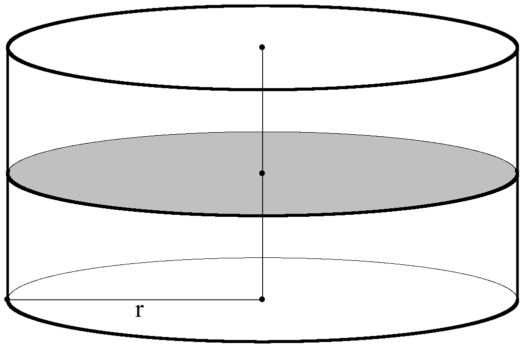
Anstatt die obige Approximation durchzuführen, bietet es sich auch an, die Formel (*) zu interpretieren; dies gelingt leicht, wenn man sie mit π multipliziert:

$$\boxed{\pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot h^2}.$$

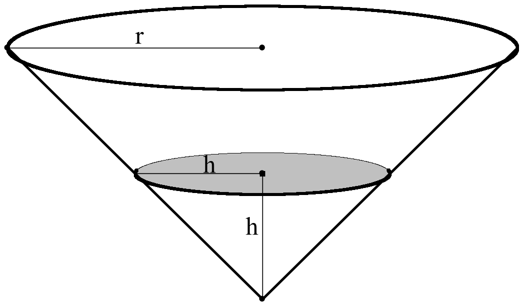
Links steht der Flächeninhalt des Schnittkreises.

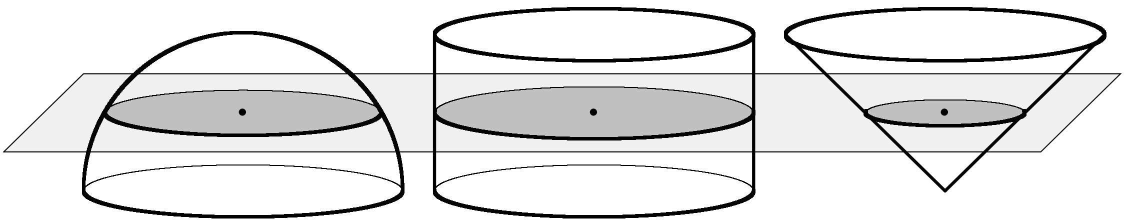


Rechts hat man mit $\pi \cdot r^2$ zunächst den Flächeninhalt des Äquatorkreises; man kann ihn auch auffassen als Flächeninhalt des Schnittkreises des umbeschriebenen Zylinders:



Der letzte Summand $\pi \cdot h^2$ hat für $h = 0$ die Größe 0 und für $h = r$ die Größe $\pi \cdot r^2$. Somit liegt die Deutung als Fläche des Schnittkreises eines Kegels nahe und kann auch leicht bewiesen werden.





Nach Cavalieri gilt also:

$$\boxed{V_{\text{Halbkugel}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}}}.$$

Wie groß sind die einzelnen Volumina?

$$\begin{array}{ccccc} V_{\text{Halbkugel}} & = & V_{\text{Zylinder}} & - & V_{\text{Kegel}} \\ \| & & \| & & \| \\ \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3 & = & \pi\cdot r^3 & - & \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \end{array}$$

mit

$$\boxed{V_{\text{Kegel}} : V_{\text{Halbkugel}} : V_{\text{Zylinder}} = 1 : 2 : 3}.$$

3. Die Oberfläche M einer Kugel: Erster Weg

Wir stellen uns die Kugel vor als aus lauter kleinen Pyramiden bestehend, deren Spitze der Kugelmittelpunkt ist und deren Grundflächen $G_1, G_2, ..., G_n$ die Kugeloberfläche M bilden.

Alle Pyramiden zusammen haben einerseits das Volumen der Kugel, nämlich $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$,

andererseits $\frac{1}{3}\cdot r\cdot\left(\underbrace{G_1+G_2+...+G_n}_{\text{Oberfläche M der Kugel}}\right)$, was auf $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3=\frac{1}{3}\cdot r\cdot M$ und damit auf

$$M=4\cdot\pi\cdot r^2$$

führt.

So ähnlich argumentierte auch Archimedes in seiner Methodenlehre:

> Durch diesen Lehrsatz, dass eine Kugel viermal so groß ist als der Kegel, dessen Grundfläche der größte Kreis, die Höhe aber gleich dem Radius der Kugel, ist mir der Gedanke gekommen, dass die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist als ihr größter Kreis, indem ich von der Vorstellung ausging, dass, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich, ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius der Kugel gleich.

4. Die Oberfläche M einer Kugel: Zweiter Weg

Beim Kreis ist der Umfang die Ableitung der Fläche. Gilt ein analoger Sachverhalt auch für die Kugel? Kann man damit die Oberfläche der Kugel bestimmen?

Die Volumenfunktion V mit $V(r)=\pi\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3$ gibt das Volumen einer Kugel mit dem Radius r wieder.

Der Zähler $V(r+h)-V(r)$ der mittleren Änderungsrate ist das Volumen der „Haut der Kugel“ oder das Volumen einer dünnen Lackschicht, mit der man die Kugel angemalt hat. Zerschneidet man die Haut bzw. die Lackschicht, so bekommt man (etwa) einen Quader mit der Fläche M und der Höhe h. Daher gilt für kleine h:

$$V(r+h)-V(r)\approx h\cdot M(r)$$

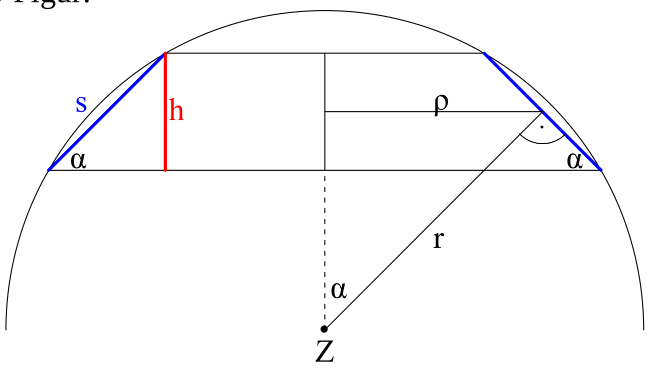
und damit nach Division durch h (auf beiden Seiten):

$$\frac{V(r+h)-V(r)}{h}\approx M(r).$$

Für $h \to 0$ ist also $V'(r) = M(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

5. Die Oberfläche M einer Kugel: Ein direkter Weg

Man schneidet die Kugel (mit Mittelpunkt Z und Radius r) in Scheiben und bekommt folgende Querschnitts-Figur:



Man muss gar nichts über Kegelstümpfe wissen. Die zu den blauen Strecken gehörige Mantelfläche wird angenähert durch einen Zylindermantel mit dem Inhalt

$$2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot s.$$

Wegen $\sin\alpha = \frac{h}{s} = \frac{\rho}{r}$ ist der angenäherte Inhalt der Mantelfläche auch zu beschreiben als

$$2 \cdot \pi \cdot h \cdot r.$$

Summiert man nun alle diese Mantelflächen auf, so muss man nur alle Werte für h aufsummieren, und diese Summe ergibt $2 \cdot r$. Damit bekommt man für die Oberfläche der Kugel den Wert

$$M = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r \cdot r = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$