Die Summe der ersten n Kubikzahlen[1]

Die Beziehung

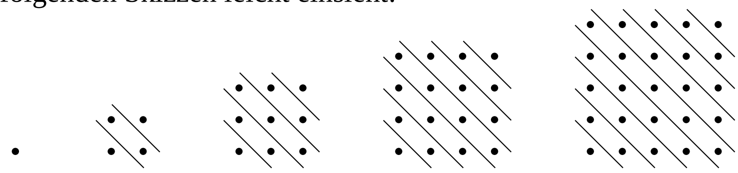
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

wird exemplarisch begründet.

Bekanntlich ist

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots+3+2+1=n^2,$$

wie man anhand der folgenden Skizzen leicht einsieht:



Addiert man also in der folgenden Tafel links alle Einträge, bekommt man 4^2:

			1
			2
			3
1	2	3	4

$= 4^2$

Multipliziert man alle Einträge mit 4, so erhält man links die Ein-mal-eins-Tafel:

$4*$

			1
			2
			3
1	2	3	4

$=$

			4
			8
			12
4	8	12	16

$= 4^3$

Dies lässt sich natürlich auch mit den anderen Einträgen machen:

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

$= 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3$

Zählt man links alle Zahlen zusammen, bekommt man

$$(1+2+3+4)+2\cdot(1+2+3+4)+3\cdot(1+2+3+4)+4\cdot(1+2+3+4)=(1+2+3+4)^2.$$

[1] J. Meyer: Lichtenberg und Potenzsummen. In: Mathematik lehren **58**, S. 60 - 62 (1993).