Irrationalitäten

Es werden acht Beweise vorgestellt.

Beweis Nr. 1

Die wohl einfachste Begründung in diesem Bereich ist die Irrationalität von $\sqrt{10}$:

Wir nehmen an, $\sqrt{10}$ sei rational, dass also $\sqrt{10}$ als $\sqrt{10}=\frac{z}{n}$ (mit natürlichem Zähler z und natürlichem Nenner n) geschrieben werden kann. Dann ist

$$10 \cdot n^2 = z^2 .$$

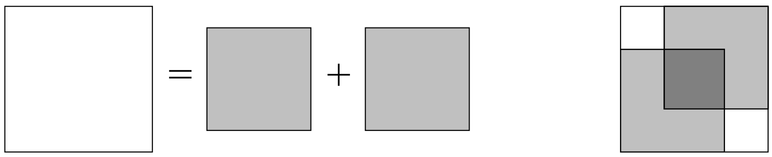
Rechts steht eine Zahl mit einer geraden Anzahl von Endnullen (auch 0 ist eine gerade Zahl!), links steht eine Zahl mit einer ungeraden Anzahl von Endnullen. Das ist ein Widerspruch.

Beweis Nr. 2[1]

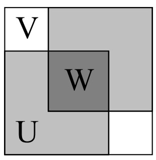
Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational, dass also $\sqrt{2}$ als $\sqrt{2}=\frac{z}{n}$ (mit natürlichem Zähler z und natürlichem Nenner n) geschrieben werden kann. Dann ist

$$2 \cdot n^2 = z^2 .$$

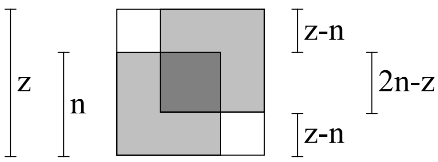
Das heißt: Ein Quadrat (z^2)ist doppelt so groß wie ein kleineres Quadrat (n^2).



Ordnet man die kleinen grauen Quadrate wie oben rechts an, so sieht man, dass das dunkle Überlappungsquadrat so groß ist wie die beiden kleinen weißen Quadrate zusammen:



Das große weiße Quadrat hat den Flächeninhalt $2 \cdot U + 2 \cdot V + W$; das kleinere graue den Flächeninhalt $U + W$. Wenn das große weiße Quadrat so groß ist wie die beiden grauen zusammen, so muss $2 \cdot U + 2 \cdot V + W = 2 \cdot (U + W)$ und daher $W = 2 \cdot V$ sein.



Die Seitenlängen n und z sind nach Voraussetzung natürlichzahlig. Die Seitenlängen des dunklen und des weißen Quadrats sind ebenfalls natürlichzahlig.

Wenn es also ein Quadrat gibt, das in zwei kleinere Quadrate zerlegt werden kann, dann kann auch ein kleineres Quadrat in zwei (noch) kleinere Quadrate zerlegt werden. Das lässt sich so fortsetzen. Da alle auftretenden Seitenlängen natürlichzahlig sind, ergibt dies einen Widerspruch.

Dieser Beweis Nr. 2 lässt sich *transferieren* auf die Irrationalität von $\sqrt{3}$.

[1] Der Beweis stammt von St. Tennenbaum; er wurde zitiert aus Alsina/Nelsen: Icons of Mathematics. 2011: Mathematical Association of America; S. 165.

Beweis Nr. 3

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}=\frac{z}{n}$ gilt mit $z, n \in \mathbb{N}$. Man rechnet dann leicht die Beziehung

$$\boxed{\frac{z}{n}=\frac{2\cdot n-z}{z-n}} \qquad (*)$$

nach. Wegen $0<z-n<n$ und $0<2\cdot n-z<z$ hat der Bruch $\frac{z}{n}$ somit eine andere Darstellung mit kleinerem (natürlichem) Zähler und kleinerem (natürlichem) Nenner. Da man die Zähler- und Nenner-Verkleinerung unbegrenzt fortsetzen kann und im Bereich der natürlichen Zahlen bleibt, bekommt man einen Widerspruch.

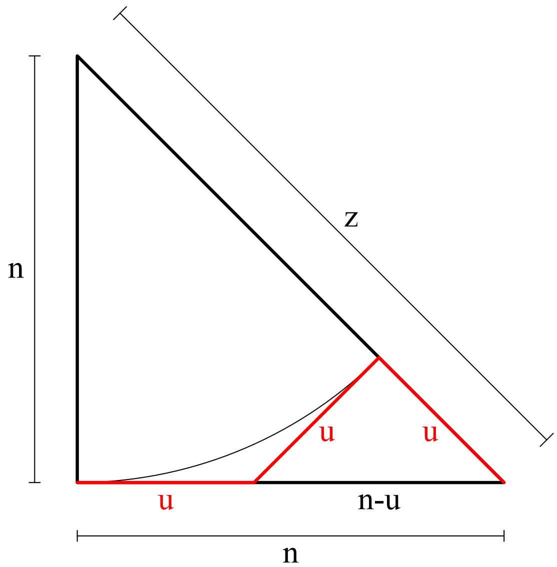
Die Beziehung (*) lässt sich ausbauen zu einem Iterationsverfahren für $\sqrt{2}$.

Die Beziehung (*) lässt sich transferieren auf die Irrationalität von $\sqrt{D}$, falls $D \in \mathbb{N}$ kein Quadrat ist.

Beweis Nr. 4

Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational, dass also $\sqrt{2}$ als $\sqrt{2}=\frac{z}{n}$ (mit natürlichem Zähler z und natürlichem Nenner n) geschrieben werden kann. Dann ist

$$z^2=n^2+n^2.$$



Nach dem Satz des Pythagoras hat man demnach ein rechtwinkliges Dreieck mit natürlichzahligen Seitenlängen. Mit einem Achtelkreis bekommt die Figur mehr Struktur.

Die roten Strecken haben alle die gleiche Länge $u=z-n$. Daher ist $n-u=n-(z-n)=2\cdot n-z$.

Nun ist das kleine Dreieck rechts unten mit den Seitenlängen u, u und $n-u$ ähnlich zum großen Dreieck mit den Seitenlängen n, n und z:

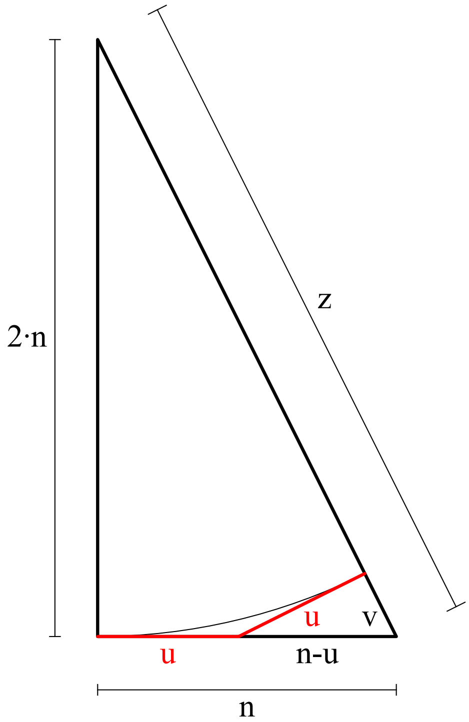
$$\boxed{\frac{z}{n}=\frac{2\cdot n-z}{z-n}}. \qquad (*)$$

Der Bruch $\frac{z}{n}$ hat somit eine andere Darstellung mit kleinerem (natürlichem) Zähler und kleinerem (natürlichem) Nenner. Da man die Zähler- und Nenner-Verkleinerung unbegrenzt fortsetzen kann und im Bereich der natürlichen Zahlen bleibt, bekommt man einen Widerspruch.

Die Beziehung (*) lässt sich ausbauen zu einem Iterationsverfahren für $\sqrt{2}$.

Beweis Nr. 5[2]

Beweis Nr. 4 lässt sich variieren zu einem Beweis der Irrationalität von $\sqrt{5}$.



Wir nehmen an, $\sqrt{5}$ sei rational, dass also $\sqrt{5}$ als $\sqrt{5}=\frac{z}{n}$ (mit natürlichem Zähler z und natürlichem Nenner n) geschrieben werden kann. Dann ist

$$z^2=(2\cdot n)^2+n^2.$$

Nach Konstruktion ist $v=z-2\cdot n$. Das kleine Dreieck rechts unten ist zum großen Dreieck ähnlich, woraus $u=2\cdot v$ folgt. Außerdem ist

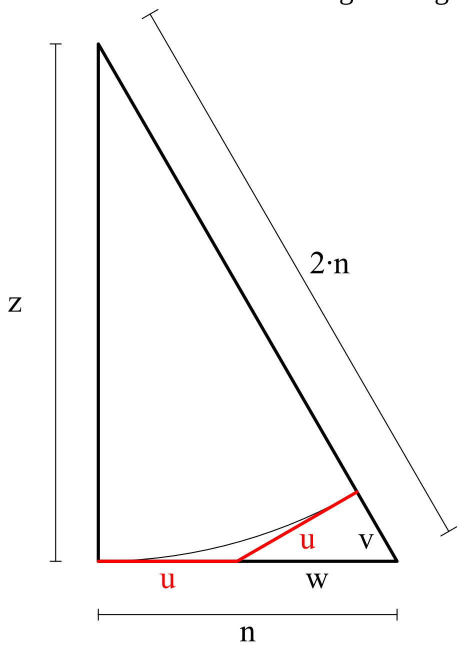
$$\frac{z}{n}=\frac{n-u}{v}=\frac{n-2\cdot(z-2\cdot n)}{z-2\cdot n}=\frac{5\cdot n-2\cdot z}{z-2\cdot n}.$$

Der Bruch $\frac{z}{n}$ hat somit eine andere Darstellung mit kleinerem (natürlichem) Zähler und kleinerem (natürlichem) Nenner und so fort …

Der Beweis Nr. 5 lässt sich ausbauen zu einem Beweis der Irrationalität von $\sqrt{k^2+1}$ für $k\in\mathbb{N}$.

Beweis Nr. 6[3]

Mit einer zum Beweis Nr. 5 analogen Vorgehensweise lässt sich die Irrationalität von $\sqrt{3}$ beweisen:



Wir nehmen an, $\sqrt{3}$ sei rational, dass also $\sqrt{3}$ als $\sqrt{3}=\frac{z}{n}$ (mit natürlichem Zähler z und natürlichem Nenner n) geschrieben werden kann. Dann ist

$$z^2=(2\cdot n)^2-n^2.$$

Nach Konstruktion ist $v=2\cdot n-z$.
Das kleine Dreieck rechts unten und das große Dreieck sind zueinander ähnlich. Daher gilt $w=2\cdot v$ sowie

$$\frac{z}{n}=\frac{u}{v}=\frac{n-w}{v}=\frac{n-2\cdot(2\cdot n-z)}{2\cdot n-z}=\frac{2\cdot z-3\cdot n}{2\cdot n-z}.$$

Der Bruch $\frac{z}{n}$ hat somit eine andere Darstellung mit kleinerem (natürlichem) Zähler und kleinerem (natürlichem) Nenner und so fort ….

Der Beweis Nr. 6 lässt sich ausbauen zu einem Beweis der Irrationalität von $\sqrt{k^2-1}$ für $k\in\mathbb{N}$.
Damit sind $\sqrt{3},\ \sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2},\ \sqrt{15},\ \sqrt{24}=2\cdot\sqrt{6},\ \sqrt{35},\ \sqrt{48}=4\cdot\sqrt{3},\ \ldots$ irrational, aber auch

[2] http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel/paperfold.pdf
[3] http://www.math.technion.ac.il/~mcwikel/paperfold.pdf

$\sqrt{5} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{9^2 - 1}$, $\sqrt{7} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{8^2 - 1}$, $\sqrt{11} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{10^2 - 1}$, $\sqrt{13} = \frac{1}{180} \cdot \sqrt{649^2 - 1}$.

Man findet zu jedem Radikanden r, der keine Quadratzahl ist, eine Darstellung $\sqrt{r} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{k^2 - 1}$ bzw. $r \cdot a^2 = k^2 - 1$. Die letzte Gleichung ist nach *Pell* benannt; in der Zahlentheorie lernt man, wie man a und k findet.

Beweis Nr. 7[4]

Dieser Beweis ist kein Widerspruchsbeweis. Wenn $\sqrt{a} = \frac{z}{n}$ rational ist mit $a \in \mathbb{N}$ und zueinander teilerfremden z und n, dann ist

$$\frac{a}{1} = \frac{z^2}{n^2}.$$

Der rechts stehende Bruch ist unkürzbar, und der links stehende ist es natürlich auch. Dann muss aber $a = z^2$ (und $n^2 = 1$) sein. Wenn $\sqrt{a}$ rational ist, muss a also eine Quadratzahl sein.

Beweis Nr. 8[5]

Annahme:	$\sqrt{2} = \frac{z}{n}$		*Widerspruchsbeweis noch fast unbekannt*
		mit z, n teilerfremd	*Der Sinn wird allenfalls erst später klar*
	$2 \cdot n^2 = z^2$		
		$\Rightarrow z^2$ gerade	*ungewohnte Schlussfolgerung*
		$\Rightarrow$ z gerade	*Anknüpfung an „Erfahrung" der Schüler*
		$\Rightarrow z = 2 \cdot u$	*ungewohnt; schon die 3. Variable*
	$2 \cdot n^2 = 4 \cdot u^2$		
	$n^2 = 2 \cdot u^2$		
		$\Rightarrow$ n gerade	
	Widerspruch zur Teilerfremdheit von z und n		

Der Beweis ist komplex und unübersichtlich, er enthält viele ungewohnte Elemente und ist daher wenig schülerorientiert.
Bewiesen wird, dass sich die (aus Sicht der Schüler ohnehin obskure) Teilerfremdheit nicht aufrecht erhalten lässt.

---

[4] nach A. Rothbart, The Mathematics Teacher **65** (1972); 667-668; zitiert in College Mathematics Journal **42** (2005); S. 317.
[5] Euklid, Elemente, Buch X.