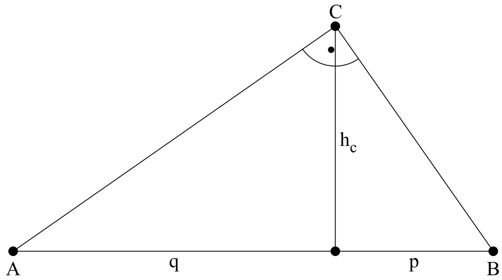
Dr. Jörg MEYER, Hameln

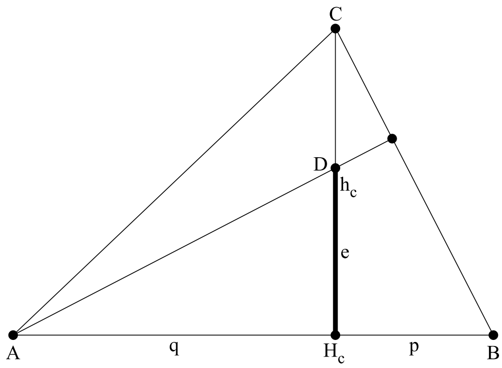
Verallgemeinerungen von Höhen- und Kathetensatz

Der Höhensatz lautet: Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) gilt $\boxed{p \cdot q = h_c^2}$.



Erste Verallgemeinerung des Höhensatzes

Man schneide die Höhe durch C mit der Höhe durch A; der Schnittpunkt sei D. Der Fußpunkt der Höhe durch C sei H_c, und es sei $h_c = |CH_c|$ sowie $e = |DH_c|$.



Legt man ein Koordinatensystem in die Figur (Ursprung in H_c), so ist $A = \begin{pmatrix} -q \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ h_c \end{pmatrix}$

und $m_{BC} = \frac{-h_c}{p}$, und daher hat die Höhe durch A die Gleichung $h_a : y = \frac{p}{h_c} \cdot (x + q)$.

Für $x = 0$ bekommt man den Höhenschnittpunkt $D = \begin{pmatrix} 0 \\ p \cdot q / h_c \end{pmatrix}$.

(Dies führt zu einer Begründung der Kopunktalität der Höhen, denn die Hähe durch B würde die Höhe durch C auch im gleichen Punkt D schneiden.)

Wegen $e = \frac{p \cdot q}{h_c}$ gilt die erste Verallgemeinerung des Höhensatzes: $\boxed{p \cdot q = e \cdot h_c}$.

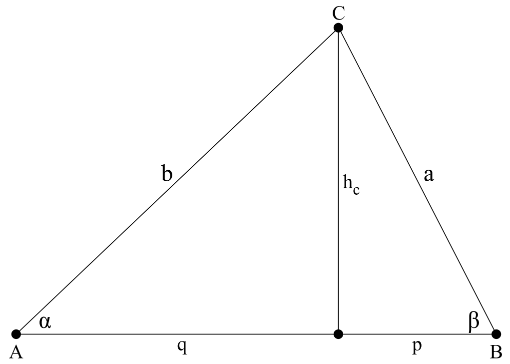
Zweite Verallgemeinerung des Höhensatzes

Aufgrund des Additionstheorems für den Cosinus ist

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\gamma$$

bzw. nach Multiplikation mit $a \cdot b$:

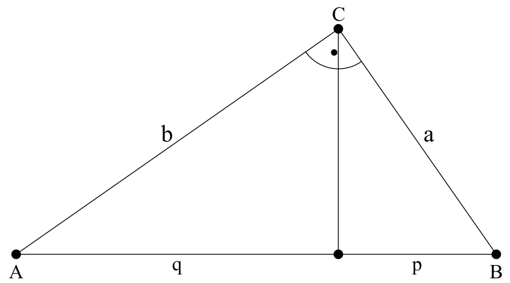
$$\underbrace{b \cdot \sin\alpha}_{h_c} \cdot \underbrace{a \cdot \sin\beta}_{h_c} = \underbrace{b \cdot \cos\alpha}_{q} \cdot \underbrace{a \cdot \cos\beta}_{p} + a \cdot b \cdot \cos\gamma$$



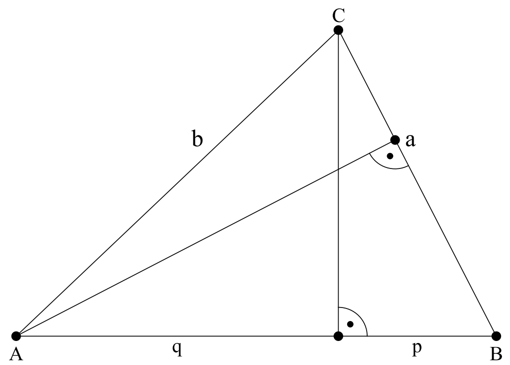
und damit die zweite Verallgemeinerung des Höhensatzes: $\boxed{h_c^2 = p \cdot q + a \cdot b \cdot \cos\gamma}$.

Verallgemeinerung des Kathetensatzes

Der Kathetensatz lautet: Im rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) gilt $\boxed{a^2 = p \cdot c;\ b^2 = q \cdot c}$.



Nun sei $\gamma \neq 90°$. Trägt man noch die Höhe durch A ein, so erkennt man die Beziehung



$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$$

(das ist der Projektionssatz, den man wegen des Sinussatzes auch als Additionstheorem des Sinus auffassen kann). Nach Multiplikation mit a folgt

$$c \cdot \underbrace{a \cdot \cos\beta}_{p} = a \cdot \left(a - b \cdot \cos\gamma\right)$$

und damit der <u>verallgemeinerte Kathetensatz</u> $\boxed{c \cdot p = a^2 - a \cdot b \cdot \cos\gamma}$.

Das Analogon lautet $\boxed{c \cdot q = b^2 - a \cdot b \cdot \cos\gamma}$; addiert man beide Gleichungen, erhält man den Cosinussatz.