Jörg MEYER, Hameln

Wege zur Dreiecksflächenformel von HERON

Hat das Dreieck die Seiten a, b und c und ist $s=\frac{a+b+c}{2}$, so hat der Flächeninhalt den Wert $F=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$.

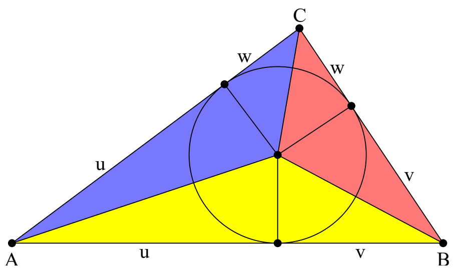
Weg 1 (rechnerisch mit dritter binomischer Formel): Unter Ausnutzung des Cosinussatzes ist

$$\begin{aligned}
16\cdot F^2 &= 4\cdot a^2\cdot b^2\cdot \sin^2\gamma\\
&= 4\cdot a^2\cdot b^2\cdot\left(1-\cos^2\gamma\right)\\
&= 4\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\\
&= 4\cdot a^2\cdot b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\\
&= \left(2\cdot a\cdot b+a^2+b^2-c^2\right)\cdot\left(2\cdot a\cdot b-a^2-b^2+c^2\right)\\
&= \left((a+b)^2-c^2\right)\cdot\left(c^2-(a-b)^2\right)\\
&= (a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(c-a+b)\cdot(c+a-b)
\end{aligned}$$

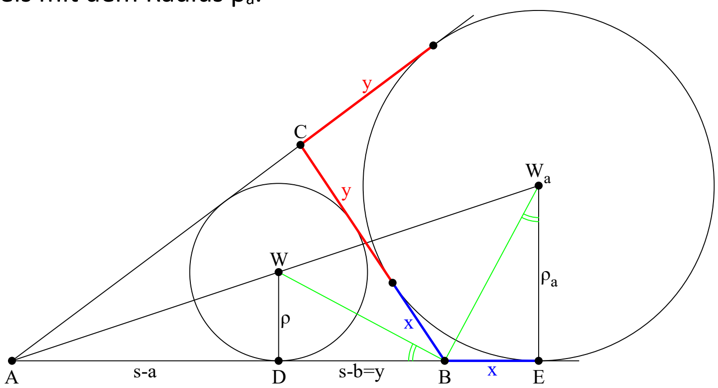
Damit ist

$$\boxed{F=\frac{\sqrt{(a+b+c)\cdot(-a+bc)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)}}{4}}.$$

Weg 2 (geometrisch): Ist ρ der Inkreisradius und $s=\frac{a+b+c}{2}$, so hat das gelbe Dreieck den Flächeninhalt $\frac{c\cdot\rho}{2}$, das rötliche $\frac{a\cdot\rho}{2}$ und das blaue $\frac{b\cdot\rho}{2}$. Zusammen ist $F=s\cdot\rho$. Aus $u+v=c$, $v+w=a$, $w+u=b$ folgt $u=s-a$, $v=s-b$, $w=s-c$.



Die Figur wird ergänzt durch den A-Ankreis mit dem Radius ρ_a.
Aus $b+y=c+x$, $x+y=a$ folgt $x=s-c$, $y=s-b$.
Dann ist $c+x=s$ und damit $\frac{\rho}{s-a}=\frac{\rho_a}{s}$ bzw. $F=\rho\cdot s=\rho_a\cdot(s-a)$.
Es folgt $F=\sqrt{\rho\cdot\rho_a\cdot s\cdot(s-a)}$. Da die beiden grünen Winkelhalbierenden BW und BW$_a$ zueinander orthogonal sind, sind die Dreiecke ADW und BEW$_a$ zueinander ähnlich, also ist



$\frac{\rho}{s-b}=\frac{x}{\rho_a}$ und damit $\rho\cdot\rho_a=(s-b)\cdot x=(s-b)\cdot(s-c)$ und deshalb $\boxed{F=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}$.

Weg 3 (Cosinussatz und Glückstreffer): Mit

$$\begin{aligned}4\cdot s_b\cdot s_c &= \left(a-(b-c)\right)\cdot\left(a+(b-c)\right)\\ &= a^2-(b-c)^2\\ &= 2\cdot b\cdot c+a^2-b^2-c^2\\ &= 2\cdot b\cdot c\cdot(1+\cos\alpha)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}4\cdot s\cdot s_a &= \left(a+(b+c)\right)\cdot\left(-a+(b+c)\right)\\ &= -a^2+(b+c)^2\\ &= 2\cdot b\cdot c-a^2+b^2+c^2\\ &= 2\cdot b\cdot c\cdot(1-\cos\alpha)\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}16\cdot s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) &= 4\cdot b^2\cdot c^2\cdot\sin^2\alpha\\ &= 16\cdot F^2\end{aligned}$$

und damit die HERON-Formel.