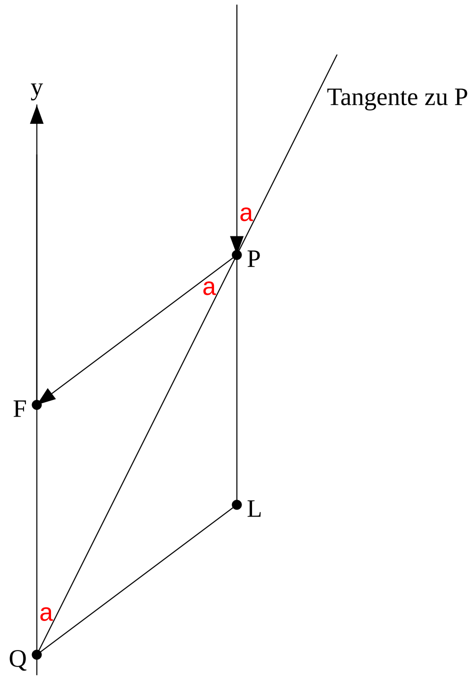
Jörg Meyer, Hameln

Nur die Parabel reflektiert achsenparallele Strahlen so, dass sie anschließend durch nur einen Punkt gehen[1]

Die Strahlen seien parallel zur y-Achse, und sie sollen nach der Reflexion an der Kurventangente durch $F=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gehen. Die Kurventangente in $P=\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y=\frac{v'(t)}{u'(t)}\cdot\left(x-u(t)\right)+v(t)$; die Argumente werden im Folgenden weggelassen.



Die Tangente schneidet die y-Achse in

$$Q=\begin{pmatrix}0\\-u\cdot\frac{v'}{u'}+v\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}0\\-q\end{pmatrix}.$$

Da der Winkel α auch bei Q auftritt, ist $\overline{FQ}=\overline{FP}$, also

$$u\cdot\frac{v'}{u'}-v=\sqrt{u^2+v^2}.$$

Ergänzt man QPF zu einem Parallelogramm, erhält man

$$L=\begin{pmatrix}u\\v-q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v-\sqrt{u^2+v^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\2\cdot v-u\cdot\frac{v'}{u'}\end{pmatrix}.$$

Ist die y-Koordinate von L konstant, so ist wegen $\overline{PF}=\overline{PL}$ der Abstand von P zu F so groß wie der Abstand von P zu einer zur y-Achse senkrechten Geraden, und damit handelt es sich um eine Parabel.

Man muss daher die y-Koordinate von L ableiten und bekommt $\left(2\cdot v-u\cdot\frac{v'}{u'}\right)'=2\cdot v'-u'\cdot\frac{v'}{u'}-u\cdot\frac{u'\cdot v''-u''\cdot v'}{u'\cdot u'}$,

und bei diesem Ausdruck ist nicht ersichtlich, warum er verschwinden soll. Vielleicht hat man mit $v-\sqrt{u^2+v^2}$ mehr Glück? Es ist $\left(v-\sqrt{u^2+v^2}\right)'=v'-\frac{2\cdot u\cdot u'+2\cdot v\cdot v'}{2\cdot\sqrt{u^2+v^2}}=v'-\frac{u\cdot u'+v\cdot v'}{q}$.

Hier erkennt man Elemente der Tangentensteigung, und wenn der letzte Ausdruck verschwinden soll, muss $\frac{v'}{u'}=\frac{u+v\cdot\frac{v'}{u'}}{q}$ bzw. $\frac{v'}{u'}=\frac{u}{q-v}$ sein. Aber die Tangentensteigung hat einen ganz anderen Wert, nämlich $\frac{v+q}{u}$.

Man soll jedoch nicht zu früh aufgeben, denn man weist leicht nach, dass $\frac{u}{q-v}=\frac{v+q}{u}$ ist.

Damit hat L tatsächlich eine von P unabhängige y-Koordinate, und bei der Kurve handelt es sich um eine Parabel.

[1] Stark modifizierte Version von J. Meyer: Kegelschnitte und Reflexionen. In: mathematica didactica **28** (1); S. 98 - 110 (2005).